I

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Элементарная теория чисел и числовых систем

С.В. Лебедева
СГУ им. Н.Г. Чернышевского
Саратов, 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Механико-математический факультет

Элементарная теория чисел и числовых систем

Учебно-методическое пособие

для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01 – педагогическое образование, профиль – математическое образование

Саратов, 2020

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р
Л 33

Рекомендовано к печати
научно-методической комиссией механико-математического факультета
Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского

Л 33 **Лебедева, С. В.** Элементарная теория чисел и числовых систем : учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 – педагогическое образование, профиль – математическое образование. / С. В. Лебедева – Саратов, 2020. – 144 с.

Серийное оформление *С.В. Лебедевой*

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р

I. Множества

Математическим понятием, отражающим объединение некоторых объектов, предметов или понятий в одну единую совокупность является понятие множества. Это понятие не определяется, подобно понятиям точки, числа, и является первичным.

Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его элементами. Все множества можно записывать с помощью заглавных букв латинского алфавита: A – множество квадратов; B – множество чисел и т.д.

Элементы множества можно записать с помощью маленьких букв: x является элементом множества A. Это можно записать так: $x \in A$ (читают: x есть элемент множества A, или x принадлежит A, или x содержится в A, или A содержит x). Если объект x не является элементом множества A, то это записывают так: $x \notin A$ (читается: x не есть элемент множества A, или x не принадлежит A, или x не содержится в A).

Например, если множество B – множество натуральных чисел, то $2 \in B$, $-7 \notin B$, и т.д.

Множество можно иногда задавать перечислением его элементов. Если множество задано списком, то названия всех элементов множества записывают в фигурные скобки, разделяя запятой. Например, если множество C состоит из трех элементов: $1, 9$ и -4, то это записывают так: $C = \{1, 9; -4\}$.

Множество считается заданным, если указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают ни какие другие объекты. Такое свойство называют *характеристическим свойством* множества. Например: множество $\{2, 4\}$ может быть задано следующим образом:

а) множество четных чисел, удовлетворяющих неравенству $1 < x < 5$;

б) множество корней квадратного уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Задание множества его характеристическим свойством записывают и в геометрии. Например, биссектриса угла есть геометрическое место точек плоскости, лежащих внутри этого угла и равноудаленных от его сторон.

Множество элементов обладающих характеристическим свойством записывают так: $A = \{x \mid -3 \le x \le 4\}$. Запись означает, что множество A состоит из всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $-3 \le x \le 4$.

Пустым называется множество не содержащее ни одного элемента; оно обозначается символом $\varnothing$.

Два множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов: $A = B$.

Пересечение множеств A и B есть множество, которое состоит из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B.

Обозначается операция пересечения: $A \cap B$.

Например, для $A = \{1; 2; 3\}$ и $B = \{2; 3; 4; 5\}$, $A \cap B = \{2; 3\}$.

Множества называются *непересекающимися*, если у них нет общих элементов, то есть их пересечение пусто.

Пусть $C = \{6; 7; 8\}$, тогда $A \cap C = C \cap B = \varnothing$.

Если заданы два множества, то можно образовать новое множество, включив в него, во-первых, элементы первого множества и, во-вторых, элементы второго множества, не совпадающие с элементами первого.

Объединение множеств A и B представляет собой множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.

Обозначается операция объединения: $A \cup B$. Для наших множеств A и B, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A, то говорят, что B – подмножество A, и пишут $B \subseteq A$.

$$A = B \text{ тогда и только тогда, когда } A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A. \qquad \text{I.1}$$

Множество U называют *универсальным*, если все рассматриваемые нами множества A_i $(i=1 \div n)$ являются его подмножествами: $A_i \subseteq U$.

Каждое непустое множество имеет, по крайней мере, два подмножества: пустое множество $\varnothing$ и само множество A. Таким образом, пустое множество является подмножеством любого множества. Подмножество подмножества само является подмножеством, то есть если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

Разностью двух множеств A и B называется такое множество, в которое входят все элементы из множества A, не принадлежащие множеству B. Разность множеств A и B обозначают $A \backslash B$.

$$A \backslash B = \varnothing, \text{ когда } A = B. \qquad \text{I.2}$$

В случае, когда $B \subseteq A$, разность $A \backslash B$ называют дополнением множества B в множестве A и обозначают B'. Справедливо равенство: $B \cap B' = A$. Чаще всего $A = U$.

Перечислим несколько свойств дополнения.

$$\varnothing' = U. \qquad \text{I.3}$$

$$U' = \varnothing. \qquad \text{I.4}$$

$$A'' = A \qquad \text{I.5}$$

Симметрической разностью (суммой) $A+B$ двух множеств A и B называется множество, являющееся объединением двух разностей $A \backslash B$ и $B \backslash A$.

Когда берутся дополнения множеств, отношения включения между ними меняются на противоположные: если $B \subseteq A$, то $A' \subseteq B'$.

Множество, элементы которого можно пересчитать называется *конечным* множеством. Конечное множество можно задавать двумя способами:

(1) указанием на некоторое свойство, которому удовлетворяют его элементы;

(2) перечислением его элементов.

Пустое множество считается конечным.

Подмножество конечного множества само конечно.

Множество, элементы которого невозможно пересчитать называется *бесконечным*.

Если множество B содержит бесконечное подмножество, то B бесконечно.

Пересечение/объединение двух конечных множеств есть тоже конечное множество.

Для операций над множествами справедливы следующие свойства:

$A\cup A'=U$ I.12

$A\cup B=B\cup A$ I.14

$(A\cup B)'=A'\cap B'$ I.16

$A\cup(A\cap B)=A$ I.18

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ I.20

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ I.22

$A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B$ I.24

$A'\cup B=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B$ I.26

$A\cap A'=\varnothing$ I.13

$A\cap B=B\cap A$ I.15

$(A\cap B)'=A'\cup B'$ I.17

$A\cap(A\cup B)=A$ I.19

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ I.21

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ I.23

$A\cap B=A \Leftrightarrow A\subseteq B$ I.25

$A\cup B=U,\ A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow A'=B$ I.27

$$A\backslash B=A\cap B' \qquad \text{I.28}$$

$$A\backslash B=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B \qquad \text{I.29}$$

$$A+B=B+A \qquad \text{I.30}$$

$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad \text{I.31}$$

$$A+B=\varnothing \Leftrightarrow A=B \qquad \text{I.32}$$

$$A+\varnothing=A \qquad \text{I.33}$$

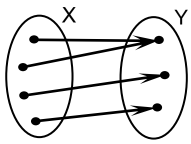
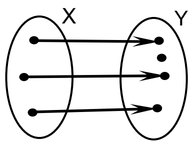
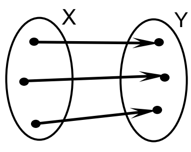
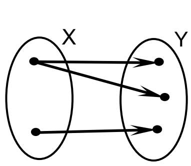
Пусть даны два множества A и B; выберем элементы $a\in A$ и $b\in B$. Пара (a,b) называется *упорядоченной*, если указано, какой элемент является первым, а какой – вторым.

Упорядоченные пары (a,b) и (c,d) называются равными, тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$.

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество $M\times N$ всевозможных упорядоченных пар (a,b) и (c,d), таких, что $a\in A$ и $b\in B$.

Возможные соответствия между двумя различными множествами представлены в следующей таблице.

Таблица 1

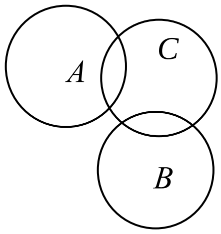
Описание	Иллюстрация	Название
Каждому элементу множества Y соответствует более одного элемента множества X		*сюръекция*
Каждому элементу множества Y соответствует не более одного элемента множества X		*инъекция*
Каждому элементу множества Y соответствует строго один элемент множества X; каждому элементу множества X соответствует строго один элемент множества Y		$\left.\begin{array}{r}\textit{сюрьекция}\\ \textit{инъекция}\end{array}\right\}$ *биекция* *(взаимно-однозначное соответствие)*
Каждому элементу множества X соответствует более одного элемента множества Y		Названия не имеет, в математике не рассматривается из-за неоднозначности определения

Соответствие между элементами множеств A и B определяет *отображение* множества A в множество B (иногда вместо отображения говорят об *унитарной операции*).

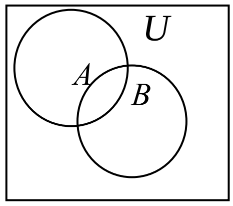
Если существует взаимно-однозначное отображение A в B, то множество A называется *эквивалентным* множеству B.

Тренировочные задачи. Серия 1. Для иллюстрации операций над множествами используют диаграммы Эйлера-Венна, где каждое множество обозначается кругом, универсальное множество – прямоугольником, а результат операции – штриховкой. Заштриховав соответствующие участки диаграмм, проиллюстрируйте следующие утверждения.

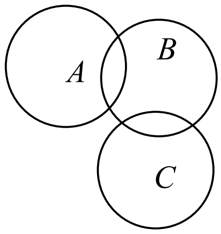
1. $x \in B \setminus (A \cup C)$



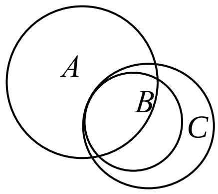
2. $x \in A' \cap B'$



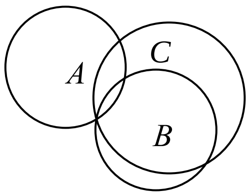
3. $x \in C \setminus (B \cup A)$



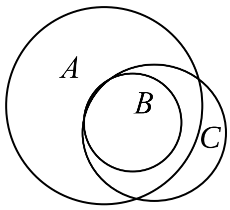
4. $x \in (A+B) \setminus C$



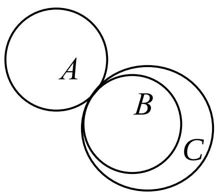
5. $x \in C \setminus (B \cup A)$



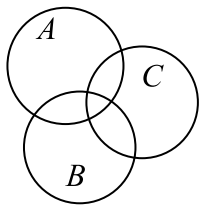
6. $x \in (B+C) \setminus A$



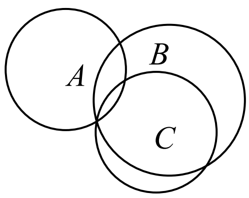
7. $x \in B+(A \setminus C)$



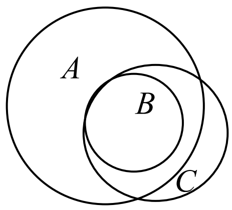
8. $x \in A+B+C$



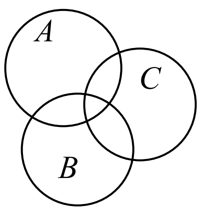
7. $x \in B+(A \setminus C)$



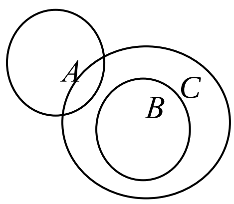
10. $x \in A+B+C$



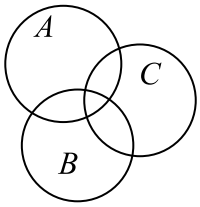
11. $x \in (A \cap B)+(C \setminus A)$



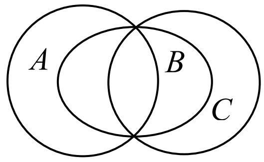
12. $x \in A+B+C$



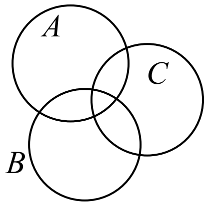
13. $x \in (A \cap B)+(C \setminus A)$



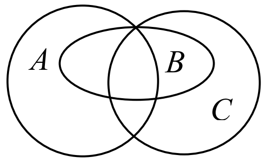
14. $x \in A+B+C$



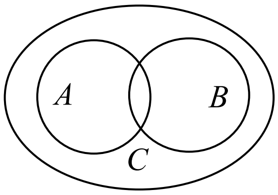
15. $x \in (A \cap B)+(C \setminus A)+B$



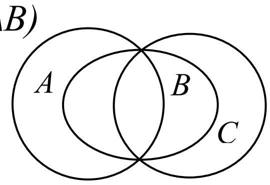
16. $x \in A+B+C$



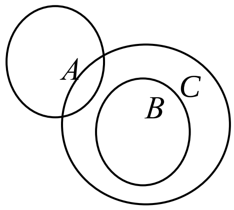
17. $x \in (A \cap B)+(C \setminus A)$



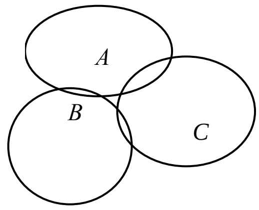
18. $x \in (A \setminus B)+(C \setminus B)$



19. $x \in A+(B \setminus C)$



20. $x \in B+(A \setminus C)$



<u>*Тренировочные задачи. Серия 2.*</u> Используя диаграммы Эйлера-Венна, проиллюстрируйте следующие свойства операций над множествами, рассмотрев различные конфигурации множеств (если условие задачи не предусматривает другого):

21. $A+B=B+A$

22. $(A+B)+C=A+(B+C)$

23. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

24. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

25. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

26. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

<u>*Тренировочные задачи. Серия 3.*</u> Даны множества: *A* – множество чётных чисел, *B* – множество чисел кратных *3*, *C* – множество чисел кратных *5*. Проиллюстрируйте с помощью диаграмм Эйлера-Венна на множествах *A, B* и *C* следующие свойства:

27. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

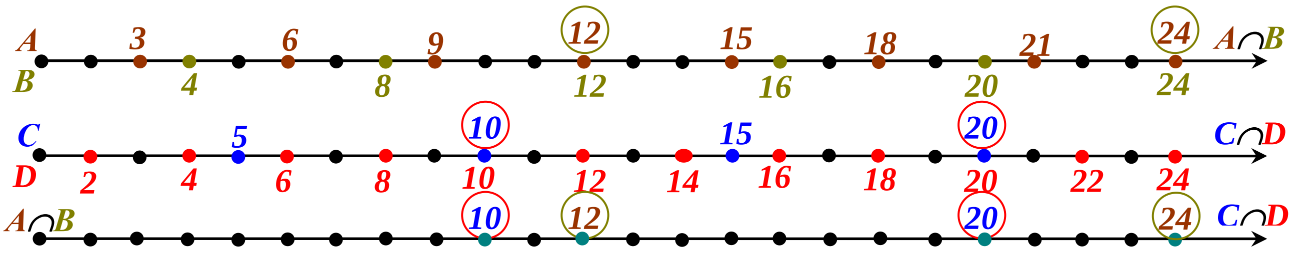
28. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

29. $A \setminus B = A \cap B'$

30. $A \setminus C = A \cap C'$

<u>*Тренировочные задачи. Серия 4.*</u> Диаграммы Эйлера-Венна в силу замкнутости фигур, используемых для иллюстрации не совсем удобны для проведения операций объединения и пересечения подмножеств множества N, поэтому обратимся к графическому способу представления информации о числовых множествах.

Договоримся пересечение и промежуточное объединение числовых множеств отмечать на одной числовой прямой (числовом луче для *N*), а результирующее объединение представлять двумя разными числовыми прямыми (лучами). Будем также для разных множеств использовать разноцветное выделение элементов. Если какой-либо элемент *n* (например, *5*) принадлежит пересечению множеств, то он на чертеже будет обозначаться ⑤. Кроме того элементы пересекаемых множеств будем подписывать «сверху» от числовой прямой для одного из множеств, и «снизу» от числовой прямой – для другого множества. Если один и тот же элемент подписан «сверху» и «снизу», то он принадлежит пересечению «верхнего» и «нижнего» множеств, и обозначается⑤. Элементы объединяемых множеств подписываем (в одну строку) или «сверху» или «снизу» от числовой прямой. На рисунке проиллюстрировано множество $F=(A\cap B)\cup(C\cap D)$, где A – множество чисел кратных 3, B – множество чисел кратных 4, C – множество чисел кратных 5, D – множество чётных чисел.



$F=(A\cap B)\cup(C\cap D)$

С учётом «договорённости» проиллюстрируйте следующие множества/свойства множеств:

31. $A\cap(D\cup C)=(A\cap D)\cup(A\cap C)$

32. $F=(A\cap C\cap D)\cup B$

33. $F=A\cap B\cap D$

34. $F=(B\cap C\cap D)\cup A$

35. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

36. $F=(A\cap B\cap D)\cup C$

Выберем в качестве универсального –множество N натуральных чисел; A – множество чётных чисел, B – множество чисел кратных 3, C – множество чисел кратных 5, D – множество чисел кратных 7, E – множество чисел кратных 11. Проиллюстрируйте следующие множества:

37. $F=(C'\cap B')\cup D$

38. $F=(D\cup B)'\cap E'$

39. $F=(C'\cup B')\cap D$

40. $F=(D\cap B)'\cup E'$

A – множество чётных чисел, B – множество чисел кратных 6, C – множество чисел кратных 9. Проиллюстрируйте следующие множества /свойства множеств:

41. $F=A+B$; $A+B=B+A$

42. $F=A+C+B$; $(A+B)+C=A+(B+C)$

43. $F=C+B$; $C+B=B+C$

44. $F=A+C$; $A+C=C+A$

<u>Развивающие задачи. Серия 5.</u> Определите с помощью характеристического свойства множества

45. $A=\{23; 22; 21; 20; 19; 18; 17; 16\}$.

46. $\boldsymbol{B}=\{15; 18; 21; 24; 27\}$.

47. $C=\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\ldots\right\}$.

48. $D=\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 2; \sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{7}; 2\sqrt{2}; 3; \ldots\}$.

49. *E* – всех двухзначных чисел, оканчивающихся цифрой *1*.

50. *G* – всех положительных чисел, образующих арифметическую прогрессию с первым членов, равным 5 и разностью 3,5.

51. *H* – всех прямоугольников.

52. *K* – всех прямоугольных треугольников.

Развивающие задачи. Серия 6.

53. Являются ли равными множество *A* – всех квадратов и множество *B* – всех прямоугольников, имеющих одинаковые стороны?

54. Являются ли равными множество *A* – всех натуральных чисел, которые одновременно делятся на *2* и *3*, и *B* – всех натуральных чисел, делящихся на 6?

55. Определите все подмножества множества $A=\{a;b;c;d\}$. Сколько среди них трёхэлементных подмножеств?

56. Даны множества $A=\{a;b;c;d\}$; $B=\{a;b;3\}$; $C=\{2;4;c\}$; $D=\{1;b\}$; $E=\{a;b;4\}$. Определите *a; b; c; d* при условии, что $B\subset A$; $C\subset A$; $E\subset A$; $D\subset B$. Полученные множества изобразите с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

Тренировочные задачи. Серия 7. *Разбиение множества* – это представление его в виде объединения произвольного количества попарно непересекающихся подмножеств. Пусть *X* – произвольное множество, тогда семейство непустых множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha\subset A}$, где *A* – некоторое множество индексов (конечное или бесконечное), называется разбиением *X*, если: (1) $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ для любых $\alpha, \beta \in A$, таких что $\alpha \neq \beta$; (2) $X = \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$. При этом множества U_α называются *блоками* или *частями* разбиения данного множества *X*. Разбиение множества объектов по какому-либо признаку называется *классификацией*.

Правильны ли следующие классификации:

57. Множество углов разбивается на подмножества острых и неострых углов.

58. Множество углов разбивается на подмножества острых и тупых углов.

59. Множество параллелограммов разбивается на подмножества прямоугольников, ромбов и квадратов.

60. Все целые числа делятся на простые и составные.

Исследовательские задачи. Серия 8. Проведите классификацию по нескольким основаниям; при необходимости используйте *дихотомию* (способ логического деления класса на подклассы, который состоит в том, что делимое понятие полностью делится на два взаимоисключающих понятия: одно обладает некоторым признаком, другое этим признаком не обладает):

61. квадратных трёхчленов,

62. натуральных чисел,

63. целых чисел,

64. рациональных чисел,

65. комбинаторных соединений,

66. графов,

67. систем счисления,

68. последовательностей,
69. треугольников,
70. конфигураций двух прямых в пространстве,
71. конфигураций двух окружностей на плоскости,
72. преобразований плоскости,
73. элементарных функций.

Исследовательские (профессионально-ориентированные) задачи. Серия 9.

Классификация предназначена для постоянного использования в какой-либо науке или области практической деятельности. Обычно в качестве основания деления в классификации выбирают признаки, существенные для исследуемых объектов. В этом случае классификация (называемая естественной) выявляет существенные сходства и различия между объектами и имеет познавательное значение. В других случаях, когда цель классификации состоит лишь в систематизации предметов, в качестве основания выбираются признаки, удобные для этой цели, но несущественные для самих предметов (например, алфавитные каталоги). Такие классификации называют искусственными.

Когда исследователь имеет перед собой сложный ряд однородных явлений, то он должен: (1) расположить их в известном порядке, удобном для исследования; (2) сгруппировать сходные явления и отличить их от тех, которые только кажутся сходными с ними, в действительности же отличны от них; (3) расположить эти группы в таком порядке, чтобы степень сродства их и взаимной зависимости выражались бы в самом расположении.

Классифицируя явления, их можно делить на группы, эти группы вновь подразделять и т. д.; исследователь, производя это деление, может иметь в виду различные цели, объективные или субъективные, причём и характер классификации зависит от её цели.

74. Перед Вами стоит цель – выявить интересы и склонности учащихся 5-6 классов для разработки программы внеурочной деятельности по математике. На какие группы можно разбить всех учащихся в соответствии с поставленной целью?

75. Во время школьных каникул Вам предстоит провести дополнительные занятия по математике с учащимися 7 классов, по одному занятию с группой в день в течение 5 дней (с понедельника по пятницу). Можно ли подобрать такие основания для классифицирования учащихся, чтобы составить 5 однородных по своему составу групп?

76. С целью определения степени тревожности, связанной с учебной деятельностью, учитель применяет методику «Градусник». Перед процедурой диагностирования учитель проводит предварительную беседу с учащимися 5 класса, в ходе которой он предъявляет предмет, который есть в каждом доме. Это – градусник. Педагог объясняет ребятам, что при высокой температуре – 38, 40, 41 – человеку плохо, тревожно. Нормальная температура человека – 36,6; у него нет тревоги, все хорошо, у него все получается, он здоров. Температура у человека может быть и 35; при такой температуре человек испытывает слабость, усталость, отсутствие интереса и желания что-либо делать. После объяснения педагог предлагает учащимся поиграть в игру. Он будет называть учебные предметы, а ребятам предлагается написать ту температуру, которая у них условно появляется при назывании этого предмета. Например: *Русский язык – 39, Математика - 36,6.*

На сколько групп учитель может разбить учеников класса по результатам этой методики? Как можно назвать эти группы? Проведите классификацию учащихся по степени тревожности, назовите каждый класс и дайте ему определение (характеристику).

77. Проектирование учебно-воспитательного процесса требует исследования учащихся по различным направлениям, Учитель приоритетными для себя считает следующие направления (выписаны по убыванию значимости) исследования учащихся: степень интереса к математике, обучаемость, успешность в освоении предмета (средняя отметка по предмету), интерес к урокам математики (отсутствие «–», ситуативный «±», стабильный «+»), ведущий канал восприятия (каналы: А – аудиальный, В – визуальный, К – кинестетический). В результате диагностики учитель получил следующие результаты для 7[а] класса (***жирным курсивом*** – число учащихся в группе).

<table>
<tr><td colspan="20">Интерес к математике</td></tr>
<tr><td colspan="9">отсутствует – 11</td><td colspan="6">ситуативный – 11</td><td colspan="2">стабильный – 3</td><td colspan="3">творческий уровень – 1</td></tr>
<tr><td colspan="20">Обучаемость</td></tr>
<tr><td colspan="2">низкая – 2</td><td colspan="4">средняя – 7</td><td colspan="3">высокая – 2</td><td colspan="2">низкая – 4</td><td colspan="3">средняя – 6</td><td>высокая – 1</td><td>средняя – 2</td><td>высокая – 1</td><td colspan="3">высокая – 1</td></tr>
<tr><td colspan="20">Успешность в освоении математики: средняя отметка по предмету:
«2» – 1 человек «3» – 8 человек «4» – 10 человек «5» – 7 человек</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td>5</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td colspan="20">Интерес к урокам математики (отсутствие «–», ситуативный «±», стабильный «+»):
Отсутствует у 2 человек, ситуативный – у 10 человек, стабильный – у 14 человек</td></tr>
<tr><td>–</td><td>±</td><td>±</td><td>+</td><td>±</td><td>+</td><td>±</td><td>+</td><td>+</td><td>±</td><td>+</td><td>±</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td>±</td><td>+</td></tr>
<tr><td colspan="20">Ведущий канал восприятия:
аудиальный (4 человека), визуальный (20 человек), кинестетический (2 человека)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
</table>

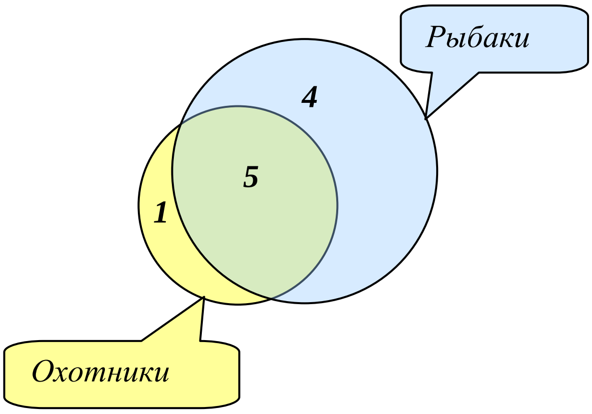
Требуется составить самостоятельную работу на 20 минут урока в трёх вариантах. Как для этого лучше разбить учащихся класса? На какой основной критерий должна быть сориентирована эта самостоятельная работа?

78. Можно ли провести классификацию учащихся 7[а] класса по тем же основаниям (см задачу ***77***), но таким образом, чтобы уменьшить число групп разбиения. Попробуйте это сделать?

79. На какого ученика ориентированы Вы? Выпишите 5 основных характеристик портрета Вашего ученика и, определив таким образом основания классификации, проведите разбиение учебного класса на группы.

Развивающие задачи. Серия 10. Можно выделить несколько возможных аспектов обращения к свойствам и операциям над множествами при решении сюжетных задач. Первая возможность связана с операцией сложения пересекающихся множеств, позволяющей решать практические типовые задачи содержания аналогичного следующей.

Охотники и рыбаки. Собрались 6 охотников и 9 рыбаков, а всего 10 человек. Как это может быть?



Решение. Поскольку число человек меньше суммарного количества представителей промысловых профессий, то разность между этими величинами определяет количество человек занимающихся одновременно и охотой и рыбалкой. Следовательно (ответ), в числе собравшихся 1 охотник, 4 рыбака и 5 человек, занимающихся одновременно и охотой и рыбалкой.

Решите задачи, проиллюстрируйте их, используя диаграммы Эйлера-Венна.

2	3	2
3		3
2	3	2

80. **Девичья хитрость.** Золотошвея, взяв 20 девушек в учение, разместила их в 8 комнатах своего дома так, как показано на рисунке. По вечерам золотошвея обходила дом и проверяла, чтобы в комнатах на каждой стороне его было по 7 девушек. Однажды к девушкам в гости приехали 4 подружки и, заговорившись, остались у них ночевать, причём все 24 девушки разместились в комнатах так, что вечером золотошвея насчитала в комнатах на каждой стороне дома опять по 7 девушек. На следующий день 4 девушки пошли провожать своих четырёх подруг и дома не ночевали. Оставшиеся 16 девушек разместились так, что опять вечером золотошвея насчитала в комнатах с каждой стороны дома по 7 девушек. Как размещались девушки по комнатам в двух последних случаях?

81. **Расстановка стульев**. Нужно расставить 7 стульев у четырёх стен комнаты так, чтобы у каждой стены было их поровну. Как это сделать? Как изменится решение задачи в случае расстановки 17 стульев в пятиугольной комнате?

82. **Подписка на газеты и журналы**. Каждая семья, живущая в нашем доме, выписывает или газету, или журнал, или то и другое вместе. 75 семей выписывают газету, а 27 семей выписывают журнал и лишь 13 семей выписывают и журнал, и газету. Сколько семей живет в нашем доме?

83. **О любви к фруктам**. В одном классе 25 учеников. Из них 7 любят груши, 11 – черешню. Двое любят груши и черешню; 6 – груши и яблоки; 5 – яблоки и черешню. Но есть в классе два ученика, которые любят всё и четверо таких, что не любят фруктов вообще. Сколько учеников этого класса любят яблоки?

84. **О знании иностранных языков**. Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 – испанский, 75 – немецкий. Все владеют, по крайней мере, одним иностранным языком. Среди них нет таких, которые знают два иностранных языка, но есть владеющие тремя иностранными языками. Сколько человек из этих 100 знают 3 языка?

85. **О розовых кустах**. В саду у Ани и Вити росло 2020 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

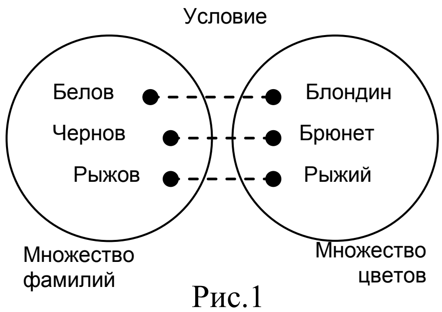


Рис.1

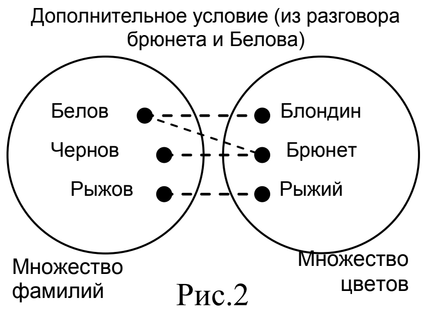


Рис.2

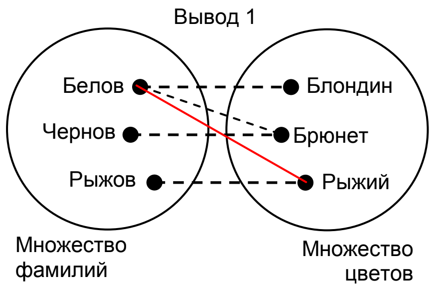


Рис.3

<u>Развивающие задачи. Серия 11.</u> Можно выделить несколько возможных аспектов обращения к свойствам и операциям над множествами при решении сюжетных задач. Первая возможность (описана выше) связана с операцией сложения множеств, вторая – с отношениями между множествами, определяющими один из способов решения логических задач аналогичных следующей.

Встреча. Встретились Белов, Чернов и Рыжов. Один из них был блондин, другой – брюнет, третий – рыжий. Брюнет сказал Белову: «Ни у одного из нас цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос у каждого из них, если брюнеты всегда говорят правду?

Решение логических задач аналогичных данной связано с рассмотрением нескольких конечных множеств с одинаковым числом элементов, между которыми требуется установить соответствие.

Договоримся элементы множеств изображать точками плоскости. Если по условию задачи между двумя элементами этих множеств есть соответствие, то будем соединять такие элементы сплошной линией. Если же между двумя элементами множеств соответствия нет, то будем соединять их пунктирной линией. При наличии биекции каждый элемент одного из множеств будет соединяться сплошной линией только с одним элементом другого множества, а с остальными элементами он будет соединяться пунктирными линиями.

<u>Решение</u>. Цепочка (Рис.1-6) рассуждений с использованием соотношений между множествами.

<u>Ответ</u>. Белов – рыжий, Чернов – блондин, Рыжов – брюнет.

Логические задачи достаточно интересны и очень полезны для развития математических способностей. Они вырабатывают умение устанавливать связи между объектами, наблюдательность, настойчивость.

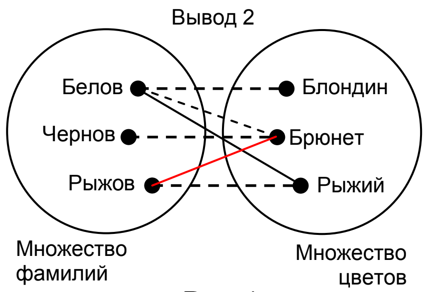


Рис.4

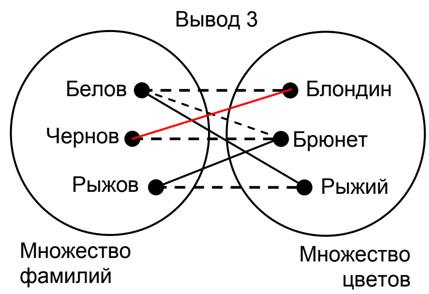


Рис.5

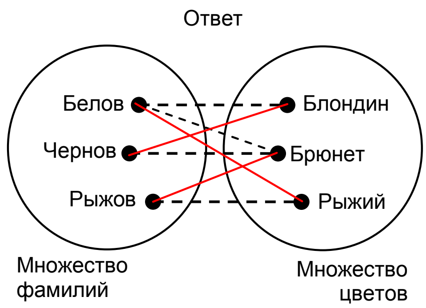


Рис.6

Решите следующие задачи, иллюстрируя каждый этап решения.

86. **Кто с кем катался?** Четыре подруги пришли на каток, каждая со своим братом. Они разбились на пары и начали кататься. Оказалось, что в каждой паре партнер выше своей партнерши и никто не катается со своей сестрой. Самый высокий из компании – Алеша Иванов, следующий по росту – Вова Лебедев, затем Любя Лебедева, Сережа Евсеев, Оля Евсеева, Дима Крылов, Инна Крылова и Аня Иванова. Кто с кем катался?

87. **Про щенков**. Три друга – Алеша, Сергей и Денис – купили щенков разной породы: щенка ротвейлера, щенка колли и щенка овчарки. Известно, что: щенок Алеши темнее по окрасу, чем ротвейлер, Лесси и Гриф; щенок Сергея старше Грифа, ротвейлера и овчарки; Джек и ротвейлер всегда гуляют вместе. У кого какой породы щенок? Назовите клички щенков.

88. **Преподаватели**. В педагогическом институте Аркадьева, Бабанова, Корсакова, Дашков, Ильин и Флеров преподают экономическую географию, английский язык, французский язык, немецкий язык, историю, математику. (1) Преподаватель немецкого языка и преподаватель математики в студенческие годы занимались художественной гимнастикой. (2) Ильин старше Флерова, но стаж работы у него меньше, чем у преподавателя экономической географии. (3) Будучи студентами, Аркадьева и Бабанова учились вместе в одном университете. Остальные окончили педагогический институт. (4) Флеров – отец преподавателя французского языка. (5) Преподаватель английского языка – самый старший из всех по возрасту и по стажу работы. Он работает в этом институте с тех пор, как окончил его. Преподаватели математики и истории – его бывшие студенты. (6) Аркадьева старше преподавателя немецкого языка. Кто какой предмет преподает?

89. **Кто взял книгу?** Библиотека, о которой пойдет речь, не столь уж велика: просто Саше вздумалось навести порядок в своих книгах. Так и есть! Пяти книг не хватает: томика Марка Твена, энциклопедии профессора Зарецкого, сборника сказок Андерсена, рассказов Бианки и сборника стихов Пушкина. Саша смутно помнил, что кому-то давал эти книги. Но кому? После многократных попыток Саше удалось вспомнить следующее: (1) к нему заходили только Андрей, Федя, Ира, Катя и Валя; никому другому он книг не давал; (2) он всегда строго придерживался правила давать друзьям только по одной книге, причем новую книгу давал только после того, как ему возвращали предыдущую; (3) Федя как-то раз брал у него энциклопедию профессора Зарецкого, но давно возвратил, так что взять эту книгу вторично Федя не мог; (4) у Андрея две литературные привязанности: стихи Пушкина и рассказы Марка Твена (книги других авторов Андрей взять не мог); (5) Катя отдает предпочтение рассказам о животных; (6) Ира читает только сказки и книги о компьютерах (поэтому она могла взять энциклопедию профессора Зарецкого); (7) Валя неизменный почитатель поэзии (остальных книг для нее просто не существует). Какую книгу взял каждый из детей?

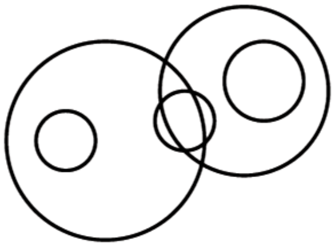
90. **Как прошёл вечер?** (1) Андрей отправился на концерт. (2) Боря провел вечер с Ольгой. (3) Женя так и не встретил Розу. (4) Полина побывала в кино. (5) Роза посмотрела спектакль в театре. Неизвестно, где именно были Дима и Серафима, но известно, что каждый юноша из этой компании был в театре, на выставке или в кино с одной из девушек – Ольгой, Розой, Полиной и Серафимой. (6) Какая-то пара посетила художественную выставку.

Занимательные задачи. Серия 12. Решите олимпиадные задачи, связанные с множествами.

91. **Детский сад**. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников – слово «рот», а остальных – слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали своё слово верно?

92. **Подарки от деда Мороза**. У деда Мороза в мешке бесконечное число конфет, занумерованных натуральными числами. За минуту до Нового года он начинает дарить детям конфеты. Сначала он дарит детям конфету с номером 1. За полминуты до Нового года он дарит 2 конфеты с номерами 2 и 3, а конфету с номером 1 отбирает, за 15 секунд до Нового года он дарит 4 конфеты с номерами 4, 5, 6, 7, а две конфеты с номерами 2 и 3 отбирает, и т.д., за 1/2n долю минуты до Нового года дед Мороз дарит 2n конфет с номерами от 2n до (2n+1 –1) и отбирает 2n–1 конфет с номерами от 2n–1 до (2n–1). Сколько конфет будет у деда Мороза и у детей в момент встречи Нового года?

93. Пол комнаты площадью 6 $м^2$ покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3 $м^2$. Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1 $м^2$.



94. **Три сосны**. Лесник считал сосны в лесу. Он обошёл 5 кругов, изображённых на рисунке, и внутри каждого круга насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?

95. В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано МА, на остальных – НЯ. Каждый ребёнок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово МАМА могут сложить из своих карточек 20 детей, слово НЯНЯ – 30 детей, а слово МАНЯ – 40 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

Познавательные и исследовательские задачи. Серия 13.

96. Разработайте один из способов информационного моделирования логических сюжетных задач, например, взяв за основу структурные модели (таблицы или графы), знаковые математические модели или компьютерные модели (в среде электронных таблиц).

97. Внимательно прочитайте следующие задачи и ответы к ним.

1. *На воду сели три воробья, один из них улетел. Сколько воробьёв осталось?* / Один и остался, остальные утонули: воробьи не сидят на воде.

2. На грядке сидят 6 воробьёв, к ним прилетели ещё 4. Кот подкрался и схватил одного воробья. Сколько осталось воробьёв на грядке? / Нисколько, так как остальные воробьи улетели. [1]

3. Раз, два, три, четыре, пять.
Кошка учится считать.
Потихоньку, понемножку
Прибавляет к мышке кошку.
Получается ответ: «Кошка – есть, а мышки – нет!»[2]

4. Однажды, точнее, когда-то и где-то
С голодным Котом повстречалась Котлета.
Котлета, представьте, всплеснула руками:
– Ах, как же я счастлива встретиться с Вами!
Кот лишь улыбнулся ей вместо ответа –
И сразу куда-то исчезла Котлета.[3]

5. Я сажаю в клетку пару животных, затем ещё одну пару; сколько животных будет в клетке? / Ответ зависит от породы животных: может случиться, что один зверь пожрёт другого; нужно также знать, должно ли производить учет немедленно или через год, в течение которого животные могут издохнуть или дать приплод.

6. Сейчас я докажу вам, что 3 раза по 2 будет не 6, как выдумаете, а всего 4. Следите за моими рассуждениями. У меня в руке 2 спички – 1 пара. Я ломаю одну спичку и получаю вторую пару. Две пары есть. Я ломаю вторую спичку и получаю третью пару. Однако, взяв три раза по 2, я получаю всего 4. Посмотрите и убедитесь: на моей ладони лежат всего 4 обломка. Где я совершил ошибку?

Что объединяет предложенные занимательные задачи? Возможны ли действия над множествами объектов, описанных в задачах? Почему? Сформулируйте возникшую проблему. Постарайтесь её решить.

98. Сформулируйте в общем виде задачу **Расстановка стульев**. Предложите алгоритм решения задач данного типа, основанный на арифметических действиях над числами (деление с остатком). Проверьте правильность алгоритма для разного числа стульев, расставляемых в n-угольных комнатах. Разработайте (в качестве иллюстраций) наглядно-образные модели.

99. Выясните суть понятия «кардинальные числа». Какие математические проблемы связаны с данным понятием? Сформулируйте их. Приведите ряд примеров использования кардинальных чисел в контексте темы, описывающей данный раздел.

100. Разработайте вариации одной из задач данного раздела.

---

[1] Волина В.В. Праздник числа. – М.: АСТ-ПРЕСС, 1996. – С.26
[2] В.Берестов. Считалочка/Литература и фантазия. – М.: Провсещение, 1994. – С.79
[3] Б.Заходер. Странное происшествие/Литература и фантазия. – М.: Провсещение, 1994. – С.170

II. Конечные множества. Комбинаторные задачи; графический метод решения комбинаторных задач

В математике и её приложениях часто приходится иметь дело с различного рода множествами и подмножествами: устанавливать связь между их элементами, определять число множеств или их подмножеств, обладающих заданным свойством. Такие задачи приходиться рассматривать при определении наиболее выгодных коммуникаций внутри города, при организации автоматической телефонной связи, работы морских портов, при выявлении связей внутри сложных молекул, генетического кода, а также в лингвистике, в автоматической системе управления, значит в теории вероятностей, и в математической статистике со всеми их многочисленными приложениями.

Раздел математики, изучающий комбинаторные соединения (размещения, перестановки и сочетания, а также их всевозможные комбинации) и связанные с ними задачи выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного множества, в соответствии с заданными правилами, называется *комбинаторикой.*

Сюжетные комбинаторные задачи – задачи выбора и расположения элементов некоторого конечного множества предметов или явлений в соответствии с заданными правилами, а также задачи о количестве таких выборов.

Поскольку сюжетные комбинаторные задачи описывают некоторые конечные множества, то одним из методов их решения является метод исчерпывающих проб, известный более как «метод перебора». Перебор всегда осуществляется по какому-либо признаку (свойству) объектов и напрямую связан с операцией классификацией объектов. Сложность комбинаторных задач заключается в том, что при их решении должна быть выбрана такая система конструктивного перебора, которая давала бы полную уверенность в том, что рассмотрены все возможные случаи (без повтора комбинаций). Наиболее перспективными являются два способа – таблица и граф-схема (дерево вариантов).

Проиллюстрируем на примере следующей задачи.

Флаги государств. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трёх горизонтальных полос равной ширины, разных цветов – белый, синий, красный. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг?

Решение-I. Будем выстраивать горизонтальную граф-схему (схема II б) на основе организационной диаграммы (Схема II а).

Первая колонка (первый уровень граф-схемы) фиксирует одно из условий задачи: наличие разрабатываемого объекта – флаг.

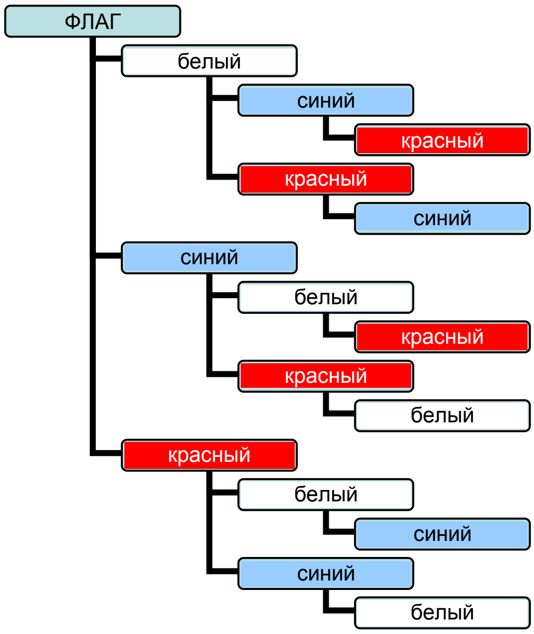


Схема IIа. Организационная диаграмма задачи ***Флаги государств***

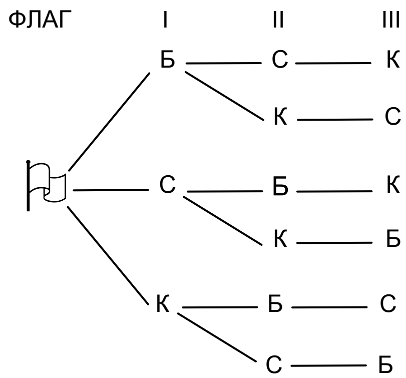


Схема IIб. Информационная модель – граф-схема задачи ***Флаги государств***

Вторая колонка (второй уровень граф-схемы) описывает возможные цветовые варианты (Б – белый, С – синий, К – красный) для первой полосы флага и поэтому обозначена римской цифрой I.

Третья колонка (третий уровень граф-схемы) описывает возможные цветовые варианты для второй полосы флага, обозначена римской цифрой II. Последняя колонка (четвёртый уровень граф-схемы) описывает возможные цветовые варианты для третьей полосы флага, обозначена цифрой III.

Количество вариантов в последней колонке даёт ответ на вопрос задачи.

Решение-II. Составим таблицу «В I-м – количество – всего».

Флаг	Количество цветовых вариантов в полосе			Всего вариантов (ответ)
	I	II	III	
1	3	2	1	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Рассуждения. Первая полоса может быть одного из трёх возможных цветов: либо белого, либо синего, либо красного. Всего 3 варианта. Вторая полоса для каждого цветового варианта первой может быть двух цветов, третья полоса для каждой из имеющихся ситуаций может быть только одного цвета. Итак, количество цветовых вариантов для флага: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Ответ. Шесть стран.

Тренировочные задания. Серия 1.

101. В высшей лиге первенства России по футболу участвуют 16 команд. Разыгрывается три медали: золотая, серебряная и бронзовая. Перед началом первенства был объявлен конкурс знатоков, в котором требовалось указать распределение медалей. Сколько различных ответов можно дать на этот вопрос?

102. В группе 16 студентов. Сколькими способами можно назначать двух дежурных?

103. В группе 16 студентов. Сколькими способами можно выбрать 14 человек для осеннего кросса?

104. За столом пять мест. Сколькими способами можно рассадить пятерых гостей?

105. Из ведра, в котором находится 27 роз, выбирают букет из семи роз. Сколькими способами может быть выбран букет?

106. Число способов расстановки восьми ладей на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга равно

107. Сколькими способами в игре «Спортлото» можно набрать 6 номеров из 49?

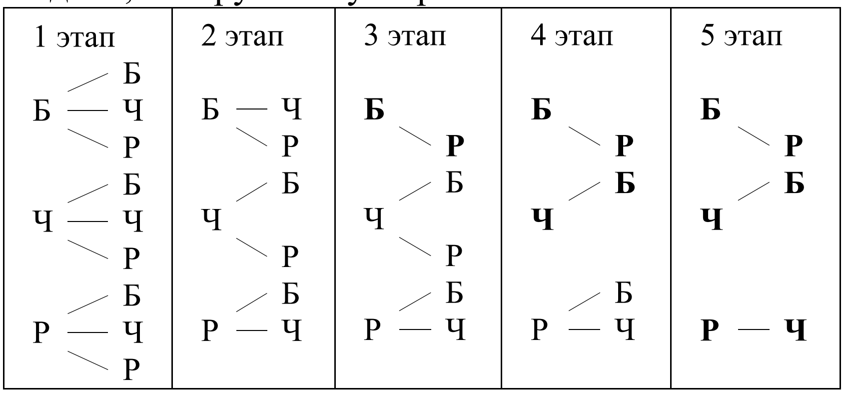
108. У Вовы есть восемь различных красок. Он собирается написать ими слова «Новый год». Сколькими способами он может это сделать, если собирается каждую букву раскрашивать одним цветом и все восемь букв должны быть разными по цвету?

109. У Вовы есть 11 книг по занимательной математике, у Васи – 15 книг. Сколькими способами они могут выбрать по три книги для обмена?

110. У ювелира есть пять изумрудов, восемь алмазов и семь топазов. Сколькими способами он может сделать браслет, включив в него по три камня каждого вида?

Тренировочные задания. Серия 2.

Некоторые логические задачи можно рассматривать, как комбинаторные и решить, используя граф-схемы (деревья вариантов). Покажем на примере задачи, которую мы уже решали.



Встреча. Встретились Белов, Чернов и Рыжов. Один из них был блондин, другой – брюнет, третий – рыжий. Брюнет сказал Белову: «Ни у одного из нас цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос у каждого из них, если брюнеты всегда говорят правду?

Построим граф-схему возможных вариантов сочетания фамилий и цвета волос (1 этап). С учётом условия: «Ни у одного из нас цвет волос не соответствует фамилии», – вычеркнем все строки, содержащие одинаковые буквы (2 этап). Следствием условия: «Брюнет сказал Белову», – является тот факт, что у Белова волосы не черные.; вычеркнем и это условие (3 этап); зафиксируем (выделим жирным) единственно возможную пару, первая часть которой – Б. Теперь последовательно будем удалять пары, вторая часть которых одинакова со второй частью уже фиксированной пары (4 и 5 этапы).

Используя граф-схемы, решите задачи:

111. **Про щенков** (см. предыдущий раздел, № 87).

112. **Кто взял книгу** (см. предыдущий раздел, № 89).

113. **Как прошёл вечер?** (см. предыдущий раздел, № 90).

114. **Клоуны**. Три клоуна Бим, Бом и Бам вышли на арену в красной, зеленой и жёлтой рубашках. Их туфли были тех же трех цветов. У Бима цвета рубашки и туфель совпадали. У Бома ни туфли, ни рубашка не были красными. Бам был в зеленых туфлях, но в рубашке другого цвета. Как были одеты клоуны?

115. **Три друга** – Алеша, Боря и Володя – учатся в различных школах (№ 577, 141 и 164) Санкт-Петербурга. Все они живут на различных проспектах (Энтузиастов, Наставников, Косыгина). Причем один из них любит математику, второй – биологию, а третий – химию. Известно, что: (1) Алеша не живет на проспекте Энтузиастов, а Борис не живет на проспекте Наставников; (2) мальчик, живущий на проспекте Энтузиастов, не учится в школе № 164; (3) мальчик, живущий на проспекте Наставников, учится в школе № 577 и любит математику; (4) Володя учится в школе № 164; (5) ученик школы № 141 не любит химию. В какой школе учится каждый из друзей, на каком проспекте он живет и какой предмет любит?

116. **Кто чем занимается?** Кондратьев, Давыдов и Федоров живут на одной улице. Один из них – столяр, другой – маляр, третий – водопроводчик. Недавно маляр хотел попросить своего знакомого столяра сделать кое-что для своей квартиры, но ему сказали, что столяр работает в доме водопроводчика. Известно также, что Федоров никогда не слышал о Давыдове. Кто чем занимается?

117. **Учителя.** Три товарища – Владимир, Игорь и Сергей – окончили один и тот же педагогический институт и преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Ярославля. Владимир работает не в Рязани, Игорь – не в Туле. Рязанец преподает не физику, Игорь – не математику, туляк преподает литературу. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из них?

118. **Спортсмены.** Алексей, Владимир, Геннадий и Петр занимаются в детской спортивной школе в разных секциях: гимнастики, легкой атлетики, волейбола и баскетбола. Петр, Алексей и волейболист учатся в одном классе. Петр и Геннадий на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с волейболистом, ни с баскетболистом. Кто в какой секции занимается?

219. **Семейный бизнес.** В семье Семеновых 5 человек: муж, жена, их сын, сестра мужа и отец жены. Все они работают. Один – инженер, другой – юрист, третий – слесарь, четвертый – экономист, пятый – учитель. Вот что еще известно о них. Юрист и учитель не кровные родственники. Слесарь – хороший спортсмен. Он пошел по стопам экономиста и играет в футбол за сборную завода. Инженер старше жены своего брата, но моложе, чем учитель. Экономист старше, чем слесарь. Назовите профессии каждого члена семьи Семеновых.

220. **Пассажиры автобуса.** В междугороднем автобусе едут шесть пассажиров: Агеев, Боков, Власов, Громов, Дубов, Елисеев. Живут они в разных городах: в Москве, Ленинграде, Туле, Киеве, Риге и Одессе. Известно, что: (1) Агеев и москвич – врачи, Дубов и ленинградец – учителя, Власов и туляк – инженеры. (2) Боков и Елисеев – участники Великой Отечественной войны, а туляк в армии никогда не служил. (3) рижанин старше Агеева, а одессит старше Власова. Боков и москвич выйдут в Киеве, а Власов и рижанин намерены выйти в Виннице. Определите фамилию, профессию и место жительства каждого пассажира.

Тренировочные задания. Серия 3.

Логические комбинаторные задачи на установление взаимно-однозначного соответствия между элементами равномощных множеств можно решать, используя таблицы соответствия (метод логических квадратов). Покажем на примере задачи **Встреча**.

1 этап

Фамилия	Цвет волос		
	Б	Ч	Р
Б			
Ч			
Р			

2 этап. Условие: «Брюнет сказал Белову»

Фамилия	Цвет волос		
	Б	Ч	Р
Б		–	
Ч			
Р			

3 этап. Условие: «Ни у одного цвет волос не соответствует фамилии»

Фамилия	Цвет волос		
	Б	Ч	Р
Б	–	–	
Ч		–	
Р			–

4 этап. Вывод – заполнения строк/столбцов в которых уже стоят 2 знака

Фамилия	Цвет волос		
	Б	Ч	Р
Б	–	–	+
Ч		–	
Р		+	–

Фамилия	Цвет волос		
	Б	Ч	Р
Б	–	–	+
Ч		–	
Р	–	+	–

Фамилия	Цвет волос		
	Б	Ч	Р
Б	–	–	+
Ч	+	–	–
Р	–	+	–

Решите указанным способом задачи:

***121*. Как прошёл вечер?** (1) Андрей отправился на концерт. (2) Боря провел вечер с Ольгой. (3) Женя так и не встретил Розу. (4) Полина побывала в кино. (5) Роза посмотрела спектакль в театре. Неизвестно, где именно были Дима и Серафима, но известно, что каждый юноша из этой компании был в театре, на выставке или в кино с одной из девушек – Ольгой, Розой, Полиной и Серафимой; какая-то пара посетила художественную выставку.

Решение (1 этап)

Юноши	Девушки				Место отдыха			
	Ольга	Роза	Фима	Полина	выставка	концерт	кино	театр
Андрей	–				–	+	–	–
Боря	+	–	–	–		–		
Женя	–	–				–		
Дима	–					–		
выставка		–		–				
концерт	–	–		–				
кино	–	–	–	+				
театр	–	+	–	–				
Место отдыха								

Раз Боря не был на концерте, то и Ольга там не была.

Решение (2 этап)								
Юноши	Девушки				Место отдыха			
	Ольга	Роза	Фима	Полина	выставка	концерт	кино	театр
Андрей	–	–	+	–	–	+	–	–
Боря	+	–	–	–	+	–	–	–
Женя	–	–	–	+	–	–	+	–
Дима	–		–	–	–	–	–	
выставка	+	–	–	–				
концерт	–	–	+	–				
кино	–	–	–	+				
театр	–	+	–	–				
Место отдыха								

Вывод 1. Ольга и Борис были на выставке.
Вывод 2. Серафима и Андрей были на концерте.
Вывод 3. Женя был с Полиной в кино
Вывод 4 Дима и Роза были в театре.

122. **Про щенков** (см. предыдущий раздел, № 87).

123. **Кто взял книгу** (см. предыдущий раздел, № 89).

124. **Кто чем занимается?** (см. предыдущий раздел, № 90)

125. **Учителя**. (см. выше, № 117).

126. **Кто где живет и у кого какая профессия.** Познакомимся с тремя людьми: Алешиным, Беляевым и Белкиным. Один из них – архитектор, другой – бухгалтер, третий – археолог. Один живет в Белгороде, другой – в Брянске, третий в Астрахани. Требуется узнать, кто где живет и у кого какая профессия. Белкин бывает в Белгороде лишь наездами и то весьма редко, хотя все его родственники постоянно живут в этом городе. У двух из этих людей названия профессий и городов, в которых они живут, начинаются с той же буквы, что и их имена. Жена архитектора доводится Белкину младшей сестрой.

127. **Карандаши.** Красный, синий, желтый и зеленый карандаши лежат в четырех коробках по одному. Цвет карандаша отличается от цвета коробки. Известно, что зеленый карандаш лежит в синей коробке, а красный не лежит в желтой. В какой коробке лежит каждый карандаш?

128. **Квартет.** Маша, Лида, Женя и Катя умеют играть на разных инструментах (виолончели, рояле, гитаре и скрипке), но каждая только на одном. Они же владеют разными иностранными языками (английским, французским, немецким и испанским), но каждая только одним. Известно, что: девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански; девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели; Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка; Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка; 5. Женя знает французский язык, но не играет на скрипке. Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

129. **Напитки**. В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

130. **Три одноклассника** – Влад, Тимур и Юра, встретились спустя 10 лет после окончания школы. Выяснилось, что один из них стал врачом, другой – физиком, а третий – юристом. Один полюбил туризм, другой – бег, страсть третьего – регби. Юра сказал, что на туризм ему не хватает времени, хотя его сестра, единственный врач в семье, заядлый турист. Врач сказал, что он разделяет увлечение коллеги. У двоих из друзей в названиях их профессий и увлечений не встречается ни одна буква их имен. Определите, кто чем любит заниматься в свободное время и у кого какая профессия.

Развивающие задания. Серия 4.

Используя граф-схемы решите следующие комбинаторные задачи с алгебраическим условием.

131. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумму цифр которых больше 4, но меньше 10?

132. Сколько натуральных чисел от 1 до 100 имеют ровно 4 натуральных делителя, не менее чем три из которых не превосходят 10?

133. Назовем число забавным, если все его цифры делятся на 4. Сколько забавных чисел среди четырёхзначных, среди шестизначных чисел?

134. Назовем две цифры близкими, если они отличаются на 1. Кроме того, будем считать близкими цифры 0 и 9. Сколько существует различных десятизначных чисел, у которых любые две соседние цифры – близкие?

135. Из множества {1, 2, 3, 4} выбираются три различных натуральных числа a, b, c. Сколько существует способов сделать это так, чтобы $a^{\left(b^c\right)}$ делилось на 4?

136. Какое наибольшее количество различных цифр можно выписать в ряд так, чтобы, подчеркнув любые две соседних, мы получили двузначное число, делящееся на 7 или 13? Число 07 тоже считается двузначным.

137. Сколькими способами цифры от 1 до 9 можно разбить на несколько (больше одной) групп так, чтобы суммы цифр во всех группах были равны друг другу (разбиения, отличающиеся только перестановкой групп считать одинаковыми)?

138. Сколькими способами цифры от 1 до 9 можно расставить в квадрате 3×3 так, чтобы в каждой строке (слева направо) и каждом столбце (сверху вниз) цифры шли по убыванию?

139. Сколькими способами можно выписать в ряд числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы для любых трёх подряд идущих чисел a, b, c величина $ac-b^2$ была кратна 7?

140. Сколько трёхзначных чисел содержат ровно одну цифру 4?

Развивающие задания. Серия 5.

Если комбинаторное соединение – упорядоченный набор элементов, каждый из которых выбирается из некоторого конечного множества, то для определения числа возможных соединений можно использовать таблицу, число столбцов которой на 1 превосходит число элементов в соединении. Покажем на примере следующей задачи.

Автомобильный номер. Комбинация из трёх букв на автомобильном номере состоит только из тех русских букв, у которых есть похожие латинские, а именно из А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х. Сколько всего таких комбинаций? Сколько комбинаций номеров, в которых совпадают только первая и последняя буквы? Сколько комбинаций номеров, в которых на первом месте – гласная, а на втором – согласная?

Количество способов выбора			Всего комбинаций
1 буквы	2 буквы	3 буквы	
1 вопрос задачи			
12	12	12	$12^3 = 1728$
{А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х} – 12 элементов			
2 вопрос задачи			
12	11	1	$12 \cdot 11 = 132$
{А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х}	{А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х}\\{выбранная буква} – 11 элементов	{выбранная буква} – 1 элемент	
3 вопрос задачи			
4	8	12	$4 \cdot 8 \cdot 12 = 384$
{А, Е, О, У} – 4 элемента	{ В, К, М, Н, Р, С, Т, Х} – 8 элементов	{А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х} – 12 элементов	

Используя я табличный способ, решите следующие комбинаторные задачи с алгебраическим условием.

141. Сколько пятизначных чисел не превосходящих 55555 имеет только чётные цифры в своей записи? Сколько пятизначных чисел не превосходящих 55555 имеет только нечётные цифры в своей записи?

142. Сколько делителей у числа 720, 15552?

143. Сколько делителей у числа 999^{999}?

144. Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых, ни первая, ни вторая цифра слева – не пятёрка?

145. Назовём число зеркальным, если слева направо оно читается так же, как справа налево. Сколько существует пятизначных зеркальных чисел? Сколько из них делятся на 5?

146. Сколько пар натуральных чисел $(x; y)$, $1 \le x, y \le 1000$, таких, что $x^2 + y^2$ делится на 5 нацело?

147. Сколько существует четырёхзначных чисел, делящихся на 4, в десятичной записи которых нет цифр 4, 5, 6, 8?

148. Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых третья цифра меньше четвёртой на 2.

149. Сколько существует шестизначных чисел, которые содержат ровно пять повторяющихся цифр (считаем, что число может начинаться с нуля)?

150. Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковые цифры?

Развивающие задания. Серия 6.

Решение задач, в которых описаны комбинаторные соединения с повторениями, и задачи на поиск числа неупорядоченных наборов элементов, которые нельзя или технически трудно решить, используя описанные ранее методы, сводится к поиску числа решений без учёта повторений или упорядоченности и уменьшению этого количества во столько раз, сколько имеется «несостоявшихся» перестановок повторяющихся или неупорядоченных элементов. Покажем на примере следующих задач.

Обмен книгами. У Вовы есть семь книг по математике, а в Васи – девять. Все 16 книг – разные. Сколькими способами мальчики могут обменяться тремя книгами (то есть дать три книги в обмен на три книги)?

Количество способов выбора 3 книг из коллекции						Всего комбинаций
Вовы (из 7 книг)			Васи (из 9 книг)			
I	II	III	I	II	III	
Считаем наборы упорядоченными						
7	6	5	9	8	7	$9 \cdot 8 \cdot 7^2 \cdot 6 \cdot 5$
Возможные («несостоявшиеся») перестановки внутри наборов						
3	2	1	3	2	1	$3^2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 4$
Ответ на вопрос задачи						
$\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7^2 \cdot 6 \cdot 5}{9 \cdot 4} = 2 \cdot 7^2 \cdot 6 \cdot 5 = 49 \cdot 60 = 2940$						

Трамвайный билет. Трамвайный билет состоит из семи цифр от 0 до 9. Сколько билетов содержат ровно 5 одинаковых цифр? Найдите самый большой и самый маленький номер билета.

1 этап решения

Количество вариантов выбора цифры номера							Всего комбинаций
I	II	III	IV	V	VI	VII	
Выбираем из 7-элементного множества $\{x, x, x, x, x, a, b\}$ без учёта повторений							
7	6	5	4	3	2	1	$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$
Возможные («несостоявшиеся») перестановки повторяющихся цифр							
5	4	3	2	1			$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$
Количество вариантов номеров семизначного билета, состоящего 3 различные цифры $7 \cdot 6 = 42$							

2 этап решения

Количество способов выбора из $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$			Всего комбинаций
x	a	b	
В случае упорядоченного набора			
10	9	8	$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
Возможные («несостоявшиеся») перестановки внутри набора			
3	2	1	6
Число множеств вида $\{x, a, b\}$ $720 : 6 = 120$			

3 этап решения

Число билетов, содержащих 5 одинаковых цифр		Всего комбинаций
Количество вариантов 7-значного номера из цифр x, a, b	Число множеств вида $\{x, a, b\}$	
42	120	5040
Самый большой номер 9999987 Самый маленький номер 1011112		

Решите задачи.

151. Сколько 23-значных чисел, у которых сумма цифр равна 4?

152. Сколько 9-значных чисел, делящихся на 5, можно составить путём перестановки цифр числа 377355372?

153. Найдите количество семизначных чисел, в десятичной записи которых могут встречаться только цифры 4, 5, 6, 7, и таких, что каждая цифра не меньше предыдущей.

154. Сколько подмножеств у 7-элементного множества?

155. Каких 6-значных чисел больше: представляющихся в виде произведения двух трехзначных или остальных?

156. Сколько существует шестизначных чисел, у которых по три четных и нечетных цифры?

157. Сколькими способами можно выбрать 5 цифр так, чтобы сумма любых двух не равнялась 10?

158. Назовём число интересным, если в его записи одна из цифр вдвое больше суммы всех остальных (например, число 2016). Сколько всего интересных пятизначных чисел?

159. Сколькими способами можно представить миллион в виде произведения трех множителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей,

а) считаются различными?

б) считаются тождественными?

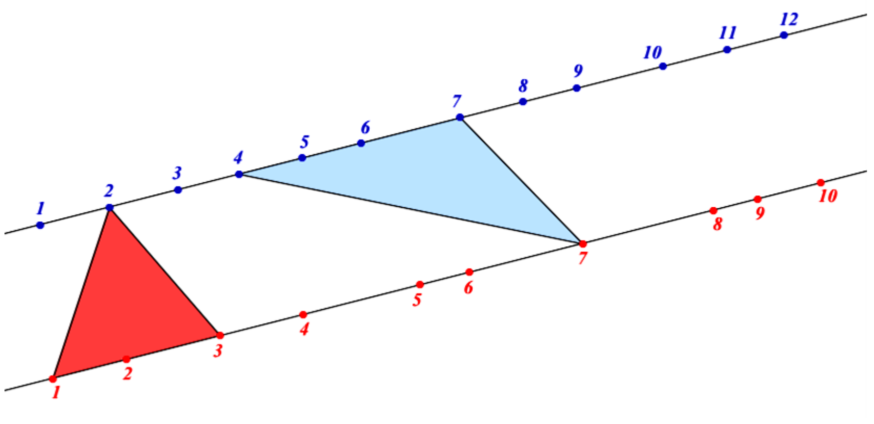
160. Из 10 различных цифр убрали три. Сколько есть способов восстановить изначальную сумму цифр?

<u>Развивающие задания. Серия 7.</u>

Решение комбинаторных задач с геометрическим условием сводится к их информационному моделированию – к составлению модели на языке множеств и/или чисел.

***161*. Между двумя параллельными прямыми.** На одной из двух параллельных прямых произвольным образом отмечены 10, а на другой – 12 точек. Сколько треугольников с вершинами в этих точках может быть построено? Сколько четырёхугольников с вершинами в этих точках может быть построено?

1 этап решения



<table>
<tr><td colspan="2">2 этап решения
С учётом построенной геометрической модели одного из множества возможных решений задачи, переформулируем её.</td></tr>
<tr><td>Сколько существует красных треугольников, если одна его вершина в одной из 12 синих точек, а другие – в двух из 10 красных точках?</td><td>Сколько существует синих треугольников, если одна его вершина в одной из 10 красных точек, а другие – в двух из 12 синих точках?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сколько всего красных и синих треугольников?</td></tr>
<tr><td colspan="2">3 этап решения
Переведём условие и требование задачи на язык множеств.</td></tr>
<tr><td>Сколько существует трёхэлементных множеств, составленных таким образом, что один элемент выбирается из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, а два других – из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}?</td><td>Сколько существует трёхэлементных множеств, составленных таким образом, что один элемент выбирается из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, а два других – из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти общее количество таких множеств.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 этап решения</td></tr>
<tr><td>Выбрать элемент из 12-элементного множества можно 12 способами, а два элемента из 10-элементного множества – $10 \cdot 9 : 2 = 45$ способами.
Всего, $12 \cdot 45 = 580$ способов составить трёхэлементное множество с заданными условиями</td><td>Выбрать элемент из 10-элементного множества можно 10 способами, а два элемента из 12-элементного множества – $12 \cdot 11 : 2 = 66$ способами.
Всего, $10 \cdot 66 = 660$ способов составить трёхэлементное множество с заданными условиями</td></tr>
<tr><td colspan="2">В сумме получаем: 580 + 660 = 1240 способов (треугольников)</td></tr>
</table>

Самостоятельно ответьте на второй вопрос задачи.

162. На прямой отметили 10 различных точек. Сколько при этом получилось отрезков?

163. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

164. На окружности отметили 12 различных точек. Сколько при этом получилось дуг?

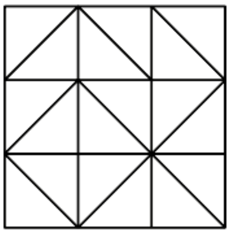
165. Сколько диагоналей в выпуклом двенадцатиугольнике?

166. На плоскости проведены 10 прямых так, что никакие две прямые не параллельны, и никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения этих прямых. Сколько треугольников образовано этими прямыми?

167. На плоскости расположены 9 точек в виде решётки 3×3. Через все возможные пары точек провели прямые. Сколько различных прямых получилось? Сколько существует различных треугольников с вершинами в этих точках?

168. На окружности отмечено одиннадцать точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в отмеченных точках? Каких из них больше: содержащих данную отмеченную точку или остальных?

169. Даны две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 2 см, на каждой отмечено по 10 точек, идущих через 1 см. нужно из этих 20 точек выбрать 9 таких, чтобы расстояние между любыми двумя из них было не менее 2 см. Сколькими способами это можно сделать?



170. Квадрат разбит на треугольники. Сколько существует способов закрасить ровно треть квадрата, при условии, что маленькие треугольники нельзя красить частично?

171. Отмечены вершины и середины сторон правильного десятиугольника. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

172. Дан правильный девятиугольник. Сколькими способами можно выбрать три его вершины так, чтобы они являлись вершинами равнобедренного треугольника?

Развивающие задания. Серия 8.

173. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

174. Четыре гостя при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Невнимательный швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получил чужую шляпу? (задача Леонарда Эйлера).

175. Сколькими способами можно вывести на арену 5 львов и 4 тигров, при условии, чтобы два тигра не шли друг за другом?

176. Необходимо разослать 7 различных фотографий, используя для этого 2 различных конверта. Сколькими способами можно это сделать?

177. В группе 20 студентов. Профессор решил каждому студенту задавать по одному из 25 каверзных вопросов. Сколько есть возможностей провести опрос в группе?

178. В кондитерском отделе продаются пирожные 4 сортов: наполеоны, эклеры, песочные, слоёные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

179. Известно, что при составлении команд многоместных космических кораблей возникает вопрос о психологической совместимости участников космического путешествия. Даже вполне подходящие порознь люди могут оказаться непригодными для длительного совместного путешествия. Предположим, что надо составить команду космического корабля из трёх человек: командира, инженера и врача. На место командира есть четыре кандидата a_1, a_2, a_3, a_4; на место инженера – три кандидата b_1, b_2, b_3; на место врача – три кандидата c_1, c_2, c_3. Проведённая проверка показала, что командир a_1 психологически совместим с инженерами b_1 и b_3 и врачами c_2 и c_3; командир a_2 с инженерами b_1 и b_2 и всеми врачами, командир a_3 – с инженерами b_1 и b_2 и врачами c_1, c_3; командир a_4 – со всеми инженерами и врачом c_2. Кроме того, инженер b_1 психологически несовместим с врачом c_3; инженер b_2 – с врачом c_1 и инженер b_3 – с врачом c_2. Сколькими способами при этих условиях может быть составлена команда космического корабля?

180. Анаграмма – это слово (не обязательно осмысленное), полученное из данного слова или словосочетания (в этом случае пробел – тоже «буква») перестановкой букв. Сколько всего анаграмм Вашего короткого имени? полного имени? имени и отчества? фамилии, имени и отчества?

181. Для того чтобы совершить какую-либо операцию через банкомат необходимо знать pin-код имеющейся на руках банковской карты. Pin-код представляет собой некоторое четырёхзначное число (здесь, 0056 – тоже число), состоящее из цифр десятичной системы счисления, то есть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Сколько неудачных попыток активации карты через банкомат может быть сделано человеком, не знающим pin-кода банковской карты?

182. Пин-код телефона состоит из 4 цифр (и может начинаться с нуля). Петя называет «счастливыми» такие пин-коды, у которых сумма крайних цифр равна сумме средних. В своём телефоне Петя использует только «счастливые» пин-коды. Он говорит, что даже если забудет одну цифру, но будет помнить её позицию, то он легко её восстановит. А если он забудет две цифры, но будет помнить их позиции, то ему придётся перебрать лишь небольшое число пин-кодов. Сколько пин-кодов придётся перебрать Пете в худшем случае? Сколько существует всего «счастливых» пин-кодов?

183. Из трёх математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию из семи человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия?

184. На дороге длиной 999 километров стоят 1000 километровых столбов, на каждом из которых написаны два числа – расстояние до начала и до конца дороги. Сколько среди этих столбов таких, на которых числа записаны только двумя различными цифрами?

185. В парламенте 30 депутатов. Каждые два из них либо дружат, либо враждуют, причем каждый дружит ровно с 6 другими. Каждые 3 депутата образуют комиссию. Найдите общее число комиссий, в которых все три члена попарно дружат или все трое попарно враждуют.

<u>Занимательные задания. Серия 9.</u>

186. Сколько существует делящихся на 9 одиннадцатизначных натуральных чисел, в записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

187. Трое ребят делят между собой 10 яблок. Сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми (то есть, если нас интересует, сколько яблок получит каждый, но не то, какие именно яблоки ему достанутся)?

188. Сколько одночленов, после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, окажется в многочлене $(1+x^3+x^6+\ldots+x^{30})(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{30})$?

189. Сколько пар натуральных чисел удовлетворяют равенству $2x+5y=90000$?

190. Сколько натуральных чисел $n \le 10^{12}$ удовлетворяют равенству $НОК(16, n) = 16n$?

191. Сколько девятизначных чисел, в которых каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно один раз, цифры 1, 2, 3, 4, 5 расположены в порядке возрастания, а цифра 6 стоит раньше цифры 1?

192. Натуральное число имеет ровно два простых делителя. Его квадрат имеет 51 различных натуральных делителей. Какое наибольшее количество делителей может иметь куб этого числа?

193. В некоторой сказочной стране алфавит состоит из трёх букв С, Г, У. словом называется любая, состоящая из этих букв конечная последовательность, в которой две согласные не могут стоять рядом и две гласные не могут стоять рядом. Сколько в этой стране состоящих из 200 букв слов, которые содержать каждую из букв алфавита хотя бы по разу?

194. Найдите количество натуральных чисел, которые делятся на 2012 и имеют, не считая 1 и самого себя, ровно 2199 различных делителей.

195. Число 2015 можно представить в виде суммы последовательных целых чисел различным образом, например, 2015 = 1007 + 1008 или (– 400) + (– 399) + … + 405. Сколькими способами это можно сделать?

Познавательные задачи. Серия 10. Принцип Дирихле:

Пусть дано множество, состоящее из n элементов, которое разбили на m подмножеств, тогда найдётся подмножество, состоящее более чем из $\left[\frac{n-1}{m}\right]$[4] элементов.

Принцип Дирихле имеет широкое применение в задачах, в которых необходимо доказать существование чисел или расположения фигур или точек с некоторыми свойствами.

196. Приведите несколько формулировок, равносильных данному утверждению. Какая из них более всего подходит для решения задач?

Решите задачи.

196.1. Обязательно ли среди двадцати пяти «медных» монет (т.е. монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей) найдётся семь монет одинакового достоинства? А если в сумме они составляют 100 рублей? 200 рублей?

196.2. Можно ли увезти 50 камней весом 370, 372, …, 468 кг на 7 трехтонках (камень раскалывать на части нельзя)?

196.3. Верно ли, что среди любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

196.4. 25 покупателей купили 73 арбуза. Среди них были купившие по одному и по два арбуза. Верно ли, что среди них имеется покупатель (хотя бы один), который купил не менее 4 арбузов?

196.5. В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета? Обобщите задачу.

196.6. Двадцать друзей пошли в поход . Самому старшему из них 35 лет, а самому младшему 18 лет. Верно ли, что среди туристов есть одногодки?

196.7. В ковре размером 4 × 4 метра моль проела 15 дырок. Всегда ли можно вырезать коврик размером 1 × 1, не содержащий внутри дырок? (Дырки считаются точечными). Как изменить условие задачи, чтобы получить другой ответ.

---

[4] Целая часть числа $\frac{n-1}{m}$.

196.8. Докажите, что в любой футбольной команде есть два игрока, которые родились в один и тот же день недели.

196.9. На газоне в форме правильного треугольника со стороной 3 м растут 10 гвоздик. Докажите, что найдутся две гвоздики, которые находятся друг от друга на расстоянии, не большем 1м.

196.10. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Познавательные и исследовательские задачи. Серия 11.

197. Выясните суть понятия «фигурные числа». Какие математические проблемы связаны с данным понятием? Сформулируйте их. Приведите ряд примеров использования фигурных чисел в контексте темы, описывающей данный раздел.

198. Составьте серию-цепочку из десяти сюжетных комбинаторных задач.

199. Выясните суть понятия «комбинаторная лингвистика». Какие математические и литературные проблемы связаны с данным понятием? Сформулируйте их. Приведите ряд примеров. В помощь – Зализняк А. А. Лингвистические задачи / С предисловием В. А. Успенского и статьёй А. Ч. Пиперски. – 3-е изд., дополн. – М.: МЦНМО, 2018. – 56 с. (https://mccme.ru/free-books/aaz/aaz-2013-3.pdf).

		1	6	7	8		4	
5	3	4	9	1			8	
		8	3			9	1	2
6	4			8		3	2	5
3			4	6	9			8
8	1	7		5			6	9
4	5	6			7	2		
	8			2	4	6	9	7
	7		1	3	6	8		

200. В чём суть логической игры «судоку»? Какое отношение имеет комбинаторика к этой игре? Опишите способы создания игрового поля и стратегию данной игры. Приведите ряд примеров.

III. Бесконечные множества. Числовые множества. Множества натуральных и неотрицательных целых чисел

Основной характеристикой конечного множества является число его элементов, или просто *число.*

Число (натуральное) – это свойство конечного множества, и в процессе счета мы как раз устанавливаем количество элементов множества. Когда математики всерьез задумались над вопросом, что же такое число, они, прежде всего, обнаружили этот факт. Кроме того, им стало ясно и другое: легче установить, совпадают или нет два числа, чем сказать, каковы они.

Если ребенок видит две чашки, каждую со своим блюдцем, то наступит день, когда он поймет, что и блюдец тоже два. Если у нас семеро гостей, а стульев всего шесть, − кто-то останется без стула. Если администратор театра видит, что каждое кресло занято одним зрителем, он понимает, что зрителей ровно столько, сколько мест в зале, и для этого ему не надо знать само количество мест.

Это означает, что понятие «равные числа» не связано с понятием «число» (несмотря на причуды языка). Подобным же образом, приложив, друг к другу два куска веревки, можно установить, что они имеют одинаковую длину, так никогда и, не узнав, чему она равна, или при помощи равноплечих весов убедиться, что два тела имеют одинаковую массу.

Во всех этих случаях легче сказать, обладают или нет два данных объекта общим свойством, чем объяснить в общем виде, что это за свойство. Всё, что требуется, – придумать способ сравнения объектов по отношению к этому (пока не определенному) свойству.

Метод сравнения длин или масс выбрать нетрудно, а как сравнивать числа?

Два множества имеют равное число элементов и называются *равночисленными* тогда и только тогда, когда между ними существует биекция.

Разобьем множества на классы равночисленных: два множества отнесем к одному классу тогда и только тогда, когда они равночисленны.

Каждый класс можно задать, указав один из его членов. Например, класс, содержащий множество $\{a, b, c, d, e\}$, включает в себя любое равночисленное с ним множество, а таковыми являются те и только те множества, которые состоят из пяти элементов. В этом смысле число 5 будет задано, если (1) задано некоторое множество и сказано, что оно состоит из 5 элементов; (2) сказано, что любое множество, равночисленное с заданным, тоже состоит из 5 элементов.

Итак, каждому множеству отвечает нечто, называемое числом, причем двум множествам отвечает одно и то же число тогда и только тогда, когда они равночисленны.

Существование чисел можно принять за аксиому. А дальше можно построить всю арифметику. Сначала определим первые несколько чисел:

0 соответствует пустому множеству $\varnothing$,

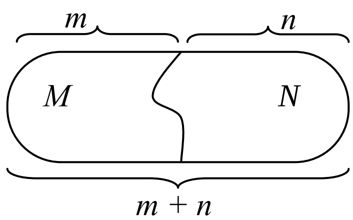
1 соответствует множеству $\{a\}$,

2 – множеству $\{a, b\}$,

3 – множеству $\{a, b, c\}$,

4 – множеству $\{a, b, c, d\}$

и т.д.



Затем введем *сложение* и *умножение* чисел. Возьмем два числа m и n. Найдем отвечающие им множества M и N (соответственно), причем такие, которые не пересекаются. Образуем объединение $M \cup N$. Ему отвечает какое-то число. Это число и будем, по определению, считать *суммой* $m + n$.

По поводу этого определения нужно сделать два замечания. Во-первых, всегда можно найти непересекающиеся множества M и N. В самом деле, если они пересекаются, можно заменять по одному общие элементы другими, и сам способ замены определяет биекцию между старым и новым множеством, которая гарантирует, что они остаются в одном классе.

Во-вторых, сложение должно быть «корректно определено». Взяв другие множества M' и N' отвечающие числам m и n, придем ли мы к тому же результату? Если нет, то наше определение бесполезно.

Допустим, что выбраны другие множества M' и N', которые не пересекаются и отвечают числам m и n. Тогда M и M' отвечают одному и тому же числу, и, значит, существует биекция $f\colon M \to M'$. По той же причине существует биекция $g\colon N \to N'$. Тогда можно построить биекцию $h\colon M \cup N \to M' \cup N'$. Если положить $h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \in M, \\ g(x) \text{ при } x \in N. \end{cases}$

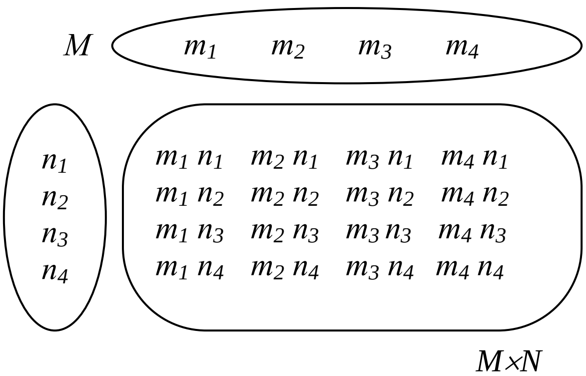
Теперь у нас достаточно информации, чтобы доказать знаменитую теорему: $2 + 2 = 4$.

Найдём непересекающиеся множества M и N, каждое из которых соответствует числу 2. По определению, можно взять $M = \{x, y\}$, $N = \{r, t\}$, где x, y, r, t различны. Существует биекция $f\colon M \to N$, при которой $f(x) = r$, $f(y) = t$, так что M и N равночисленны. Значит, N тоже соответствует числу 2.

Образуем объединение $M \cup N = \{x, y, r, t\}$.

Существует биекция между этим множеством и множеством $\{a, b, c, d\}$, определенная формулами $g(x) = a$, $g(y) = b$, $g(r) = c$, $g(t) = d$.

Множество $\{a, b, c, d\}$ по определению, соответствует числу 4, значит, и $M \cup N$ соответствует числу 4. По определению сложения, $2 + 2 = 4$.



Для определения умножения чисел m и n, возьмем соответствующие множества M и N, построим их (декартово) произведение $M \times N$ и соответствующее ему число будем считать *произведением* $m \cdot n$.

При этом справедливо равенство III.1:

$$m \cdot n = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ штук}}$$

При таком подходе можно доказать законы арифметики, по крайней мере для натуральных чисел (а из них уже можно вывести эти законы для отрицательных целых, для рациональных и для действительных чисел).

Возьмем, например, дистрибутивный (распределительный) закон умножения: $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$.

Пусть множества M, N, P соответствуют числам m, n, p причем M и N не пересекаются. Тогда $(m+n\cdot)p$ отвечает множеству $(M \cup N) \times P$, а $(m \cdot p + n \cdot p)$ – множеству $(M \times P) \cup (N \times P)$. Эти множества совпадают: первое состоит из всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in M$ или $x \in N$, а $y \in P$; второе состоит из всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in M$ и $y \in P$ или $x \in N$ и $y \in P$.

Раз эти множества совпадают, то между ними существует биекция. Следовательно, они равночисленны, отвечающие им числа равны, и распределительный закон доказан[5].

Аналогично доказываются другие законы арифметики натуральных чисел:

III.2. $a + b = b + a$

III.3. $a + (b + c) = (a + b) + c$

III.4. $a \cdot b = b \cdot a$

III.5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

III.6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Однако, производя действия над числами, неуместно обращаться каждый раз к соответствующим конечным множествам. Будем рассматривать числа в качестве самостоятельного математического объекта, для чего объединим все числа в новое множество N, которое косвенно определим следующей системой аксиом (система аксиом Пеано) и будем называть *множеством натуральных чисел*.

1) Единица есть натуральное число.

2) Для любого натурального числа существует одно и только одно непосредственно следующее за ним натуральное число.

3) Любое натуральное число непосредственно следует не более чем за одним натуральным числом.

4) Единица не следует ни за каким натуральным числом.

5) Если какое-нибудь утверждение верно для единицы, и если всякий раз, когда оно верно для какого-нибудь натурального числа, оно верно и для непосредственно следующего за ним числа, то это утверждение верно для любого натурального числа.

На основе системы аксиом Пеано может быть построена арифметика натуральных чисел, то есть, определены все известные понятия арифметики (например, числа 2, 3, 4 и т.д., сложение чисел, вычитание и пр.) и доказаны все теоремы арифметики (например, законы сложения, умножения и пр.).

Последняя аксиома системы Пеано носит название *аксиомы математической индукции* и лежит в основе одного из методов доказательства математических утверждений, связанных с натуральным рядом, позволяющих

[5] Приведённый в данном разделе материал основан на содержании статьи Яна Стюарта «Счёт, понятие о бесконечном»/ Концепции современной математики. – Минск: Высшая школа, 1980. – С.162 – 171.

сделать общее заключение на основании частных**.** Как и аксиома, метод именуется *методом математической индукции*.

Применение метода математической индукции (ММИ) сводится:

1. К проверке высказанного утверждения для $n = 1$.

2. К предположению, что утверждение верно для $n = k$.

3. К доказательству теоремы, что из предложения справедливости утверждения для $n = k$ следует справедливость утверждения и для $n = k+1$.

Иногда пункт 1. рассматривается не с $n = 1$, а с какого-нибудь другого утверждения для $n = n_0$, например, при доказательстве неравенства $2^n > n^2$ пришлось бы начинать с $n = 5$**.** Однако это не умоляет общность метода, так как всегда можно положить $n = m + 4$ (в общем случае $n = m + (n_0 - 1)$) и рассматривать процесс доказательства утверждения $2^{m+4} > (m+4)^2$, начиная с $n = 1$.

Очень важно уметь представлять натуральное число различными способами (III.7):

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1} = a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1$$

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2} \cdot 10 + a_1$$

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_3} \cdot 100 + a_2 \cdot 10 + a_1 = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_3} \cdot 100 + \overline{a_2 a_1} \quad \text{и т.д.}$$

Отношение порядка на множестве натуральных чисел определяется на основе закона трихотомии и ряда определений.

Закон трихотомии: для любых двух натуральных чисел a и b выполняется одно и только одно из трёх соотношений, где c – некоторое натуральное число:

1*. $a = b$ 2*. $a = b + c$ 3*. $b = a + c$

В соответствии с этим законом, для <u>любых двух натуральных чисел a и b</u> выполняется одно и только одно из трёх соотношений порядка, где c – некоторое натуральное число:

1*) $a = b$,

2*) число *a больше* числа b: $a > b$, если $a = b + c$, (III.8)

3*) число *a меньше* числа b: $a < b$, если $b = a + c$. (III.9)

Отношение порядка обладает рядом свойств:

III.10. $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ III.11. $a = b, x = y \Rightarrow a + x = b + y$

III.12. $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ III.13. $a < b, x < y \Rightarrow a + x < b + y$

III.14. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ III.15. $a > b, x > y \Rightarrow a + x > b + y$

III.16. $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$ III.17. $a = b, x = y \Rightarrow a \cdot x = b \cdot y$

III.18. $a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$ III.19. $a < b, x < y \Rightarrow a \cdot x < b \cdot y$

III.20. $a > b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$ III.21. $a > b, x > y \Rightarrow a \cdot x > b \cdot y$

Напомним, что результат сложения двух натуральных чисел называется их *суммой*, а сами числа, участвующие в сложении – *слагаемыми*; результат умножения двух чисел называется *произведением*, а числа, участвующие в умножении – *множителями*. Определим возведение числа a в степень n как произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ штук}}, \qquad \text{(III.22)}$$

Назовём результат возведения числа степень – *степенью,* число, возводимое в степень (число, повторяющееся сомножителем) – *основанием степени,* другое (число, указывающее количество сомножителей) – *показателем степени.*

Для натуральных чисел a, b, m, n справедливы следующие свойства (соответственно III.23 – III.25):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}; \qquad (ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

На множестве натуральных чисел можно рассмотреть арифметические действия, обратные сложению, умножению и возведению в степень.

Назовём арифметическое действие, обратное сложению – *вычитанием:* $a - b = x$, а его результат x – *разностью чисел* a и b при условии: $a = b + x$. Компоненты вычитания называются соответственно: a – уменьшаемое и b – вычитаемое.

Назовём арифметическое действие, обратное умножению – *делением:* $a : b = y$, а его результат y – *частным чисел* a и b при условии: $a = b \cdot y$. Компоненты деления называются соответственно: a – делимое и b – делитель.

Назовём арифметическое действие, обратное возведению в степень – *извлечением корня из числа:* $\sqrt[n]{a} = z$, а его результат z – *арифметическим корнем из числа* a при условии: $a = z^n$. Компоненты извлечения корня называются соответственно: a – подкоренное число и n – показатель корня.

Остаётся определить операцию (арифметическое действие) нахождения показателя степени по известному основанию и результату возведения в степень. *Логарифмом* числа b по основанию a называется показатель степени, в который надо возвести число a, чтобы получить число b:

$$w = log_a b \text{ при условии: } a^w = b.$$

Если к некоторому числу a применить последовательно прямое и обратное арифметическое действие, то число останется без изменения:

III.26. $(a + b) - b = a$ III.28. $(a \cdot b) : b = a$ III.30. $(\sqrt[n]{a})^n = a$

III.27. $(a - b) + b = a$ III.29. $(a : b) \cdot b = a$ III.31. $\sqrt[n]{a^n} = a$

III.32. $n^{log_n a} = a$

Приём последовательного применения прямого и обратного арифметических действий часто используют при упрощении выражений.

С учётом введённых определений сформулируем ряд новых свойств.

III.33. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

III.34. $a^m : a^n = a^{m-n}$

III.35. $(a : b)^n = a^n : b^n$

III.36. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

III.37. $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

III.38. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

III.39. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

III.40. $log_n(a \cdot b) = log_n a + log_n b$

III.41. $log_n(a : b) = log_n a - log_n b$

III.42. $log_n a^m = m \cdot log_n a$

III.43. $log_n a = (log_n b) \cdot (log_b a)$

III.44. $log_n a = (log_m a) : (log_m n)$

На множестве N определены (имеют смысл для любых двух натуральных числе) операции сложения, умножения и возведения в степень. Остальные арифметические операции над натуральными числами без введения чисел другой природы возможны не всегда. Например, нахождение разности двух равных чисел, приводит нас к необходимости введения нового числа, не являющегося натуральным, которое назовём нулём:

$$a - a = 0 \tag{III.45}$$

Нуль в объединении с множеством N образует новое множество *неотрицательных целых чисел.*

Введение нуля приводит к появлению новых свойств:

III.46. $a + 0 = a$	III.47. $a - 0 = a$
III.48. $a \cdot 0 = 0$	III.49. $0 : a = 0$
III.50. $0^n = 0$	III.51. $\sqrt[n]{0} = 0$
III.52*. $a^0 = 1$	III.53. $\log_n 1 = 0$

Определяя *противоположные* числа, как числа, удовлетворяющие свойству:

$$a + (-a) = 0 \tag{III.54}$$

расширим числа до множества Z целых чисел: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

На множестве Z определены (имеют смысл для любых двух натуральных числе) операции сложения, вычитания, умножения и возведения в степень. Следовательно, $N \subset Z$.

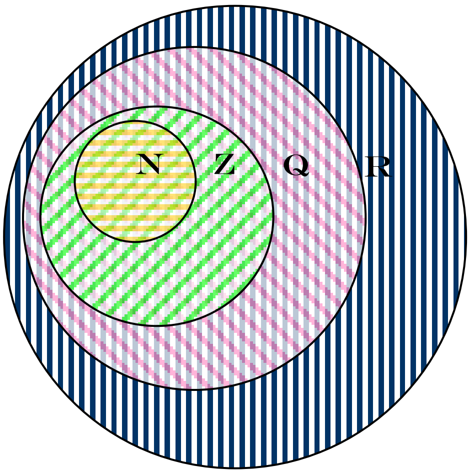


Схема III.1. Соотношение между основными числовыми множествами

Следующее расширение до множества Q рациональных чисел позволяет проводить операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень. Следовательно, $N \subset Z \subset Q$. А значит, любое целое число n можно представить в виде дроби со знаменателем 1, то есть $n = \frac{n}{1}$.

Таблица 2 даёт представление о расширении понятия числа и содержит условия возможности выполнения действий на множестве N ($a, b, c, n, r \in$ N), а схема III.1 является наглядно-образной моделью данного процесса.

---

* Определение степени с нулевым показателем.

Таблица 2

Расширение понятия числа

№	Действие	Условие	Результат	Введение чисел новой природы; новые числовые множества		Пример
1	Вычитание $a-b$	$a>b$	$(a-b)\in$ N	N	Целые числа; Z	$27-3=18$ $18\in$ N, Z
2		$a=b$	$a-b=a-a=0$	Нуль; $\{0\}$		$27\text{-}27=0$ $0\in$ Z
3		$a<b$	$a-b=-(b-a)$ целое отрицательное число	Целые отрицательные числа; Z_-		$3-27=-18$ $-18\in Z_-$ $-18\in$ Z
4	Деление	$a<b$	$a:b=\dfrac{a}{b}$ обыкновенная правильная дробь	Обыкновенные дроби	Рациональные положительные числа Q_+	$3:27=\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$ $\dfrac{1}{9}\in Q_+$
5	$a:b$ нацело	$a\geq b$; $a=b\cdot n$	$a:b=b\cdot n:b=n$ $\Leftrightarrow$ $a\vdots b$	N		$27:3=9$ $9\in$ N,Z,Q_+
6	$a:b$ с остатком	$a\geq b$; $a\neq b\cdot n$ $\Leftrightarrow$ $a=b\cdot n+r$ где $0<r<b$	$a:b=n(ост.r)$ деление с остатком $a:b=\dfrac{a}{b}=n\dfrac{r}{b}$, где $\dfrac{a}{b}$ – обыкновенная неправильная дробь, $n\dfrac{r}{b}$ – смешанное число	Обыкновенные дроби		$27:2=13(ост1)$ $27:2=13\dfrac{1}{2}$ $13\dfrac{1}{2}\in Q_+$
7	Извлечение корня $\sqrt[a]{b}$	$b=c^{n\cdot a}$	$\sqrt[a]{b}=\sqrt[a]{c^{n\cdot a}}=c^n$	N	Действительные положительные числа R_+	$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ $3\in$ N,Z,Q_+ $3\in R_+$
8		$b\neq c^{n\cdot a}$	$\sqrt[a]{b}$	Иррациональные алгебраические числа I_+		$\sqrt[27]{3}$ $\sqrt[27]{3}\in I_+,R_+$
9	Нахождение показателя степени n	$a:b=a_1$ $a_1:b=a_2$ $a_2:b=a_3$ . . . $a_{n-1}:b=1$	$n=\log_b a$	N		$27:3:3:3=1$ $\log_3 27=3$ $3\in$ N,Z,Q_+ $3\in R_+$
			$^1/_n=\log_a b$	Аликвотные дроби		$\log_{27}3={}^1/_3$ $^1/_3\in Q_+,R_+$
10		в противном случае	$\log_b a$	Логарифмы; иррациональные трансцендентные числа		$\log_2 27\in R_+$

Тренировочные задания. Серия 1.

201. Из чисел $-3,-2,-1,0,1,2,3$ выберите все те, при которых число $10x+1$ больше числа $8x-2$.

202. Какое из утверждение справедливо для $0<a<1$:

а) $a^2<a^3$ б) $a^2>a^3$ в) $a^2=a^3$?

203. Какие целые числа заключены между числами $\sqrt{15}$ и $\sqrt{35}$?

204. Найти значение выражения $(m^{-6})^{-2}m^{-14}$ при $m=\frac{1}{4}$.

205. О натуральных числах a,b,c известно: $a>b>c$. Какое из следующих чисел отрицательно?

а) a^2-b^2 б) $ab-cb$ в) $bc-c^2$ г) $ac-ab$

206. Найти значение выражения $2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$.

207. Какое из утверждение справедливо для $x>y-z$:

а) $x-y>z$ б) $y>x+z$ в) $z-x>y$ г) $z>y-x$

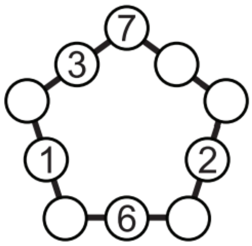
208. Представьте произведение $4\cdot 2^n$ в виде степени с основанием 2, 4, 8 и 3.

209. Преобразуйте степень 2^{5-a} так, чтобы выражение в показателе было свободно от арифметических действий

210. Найти значение выражения $log_2 3\cdot log_3 4\cdot log_4 5\cdot log_5 6\cdot log_6 7\cdot log_7 8$.

Развивающие задания. Серия 2. Олимпиадные задачи для учеников 3-4 классов

211. Из множества однозначных натуральных чисел выбираются пять таких, что никакие два из них в сумме не дают 10. Какое число будет в этом множестве обязательно?



212. Заполните натуральными числами пустые кружочки так, чтобы на всех сторонах пятиугольника суммы трех чисел были одинаковы. Выявите и объясните закономерность.

213. Сумма двух натуральных чисел равна 170. Первое число оканчивается цифрой 5, а если эту цифру отбросить, то получится второе число. Чему равна разность этих чисел? Решите задачу в общем виде.

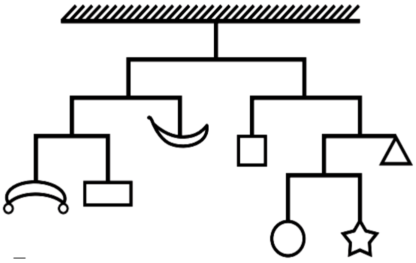
214. Самое маленькое из двузначных чисел с двузначной суммой цифр сложили с самым большим из двузначных чисел с однозначной суммой цифр. Что получилось?

215. Будем выписывать подряд целые числа 1, 2, 3,…, исключая те, которые содержат цифру 7. Какое число будет 777-ым?

216. Назовем трехзначное число удивительным, если оно делится на 3, а первая и последняя цифры у него одинаковы. Чему равна наименьшая разность между двумя удивительными числами?

217. Используя только две цифры: 1 и 7 напишите несколько чисел, сумма которых равна 2016, 2017, 2018, 2019 и 2020. Какое наименьшее количество чисел в каждом случае придётся написать?

218. У двух трехзначных чисел совпадают суммы цифр. От большего числа отняли меньшее; какое самое большое значение разности можно получить?



219. Конструкция на рисунке весит 128 граммов и находится в равновесии (вес горизонтальных планок и вертикальных нитей не учитывается). Сколько весит звездочка?

220. У каждого двузначного числа нашли произведение цифр, потом у каждого такого произведения подсчитали сумму цифр. Какая сумма самая большая?

Развивающие задания. Серия 3. Олимпиадные задачи для учеников 5-6 классов.

221. Записали несколько положительных чисел, сумма которых равна 100. Среднее арифметическое трех самых больших из них равно 20, а двух самых маленьких – 13. Сколько чисел написано? …

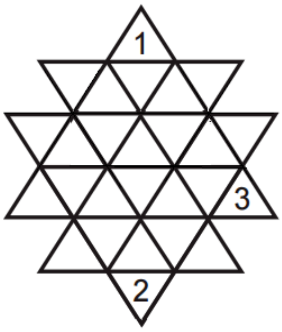
222. Разность двух чисел на 17 меньше уменьшаемого и на 9 больше вычитаемого. Чему равна эта разность?

223. Сколько трехзначных чисел обладает следующим свойством: если из такого числа вычесть 297, то получится трехзначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке?

224. На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма этих чисел равна их произведению и равна 2016. Какое самое маленькое количество чисел может быть на доске?

225. Найдите наименьшее среди натуральных чисел обладающих свойством: множество его делителей таково, что там найдутся числа, оканчивающиеся цифрами 0, 1, 2, …, 9.

226. Все числа, сумма цифр которых делится на 5 выписывают в порядке возрастания. Чему равна самая маленькая разность между соседними числами в этом ряду?



227. В каждый маленький треугольник надо вписать одно из чисел 1, 2, 3, 4 (некоторые числа уже вписаны). Вписывать надо так, чтобы в любой полоске, состоящей из 4 маленьких треугольников, встречались все 4 числа.

228. Сколько двузначных чисел обладают таким свойством: если переставить местами их цифры, то они увеличиваются не менее, чем в 3 раза?

229. Если сумма трех последовательных положительных целых чисел равна 99, то чему равно произведение цифр первого из них?

230. Число 111…111 (2022 единицы) разделили на 3. Сколько нулей получилось в записи частного?

Развивающие задания. Серия 4. Олимпиадные задачи для учеников 7-8 классов.

231. Найдите двузначное число, сумма квадратов цифр которого равна 10. Если из этого числа вычесть 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

232. Найдите двузначное число такое, что если это число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7, в остатке 6. Если же искомое двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке число, равное сумме цифр искомого числа.

233. Найдите двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр.

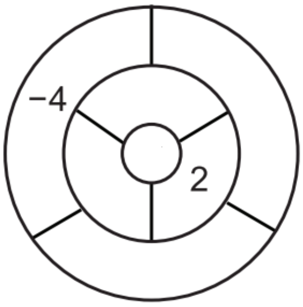
234. Найдите два трёхзначных числа, записанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке. Сумма искомых чисел равна 1252, сумма цифр каждого из чисел равна 14, а сумма квадратов цифр каждого из чисел – 84.

235. Натуральное число a увеличили на 1, а его квадрат увеличился на 1001. Чему равно a?

236. Найдите, чему равно выражение $(10^2+11^2+12^2+13^2+14^2):365$ не менее чем двумя способами.

237. В примере на сложение двух чисел первое слагаемое меньше суммы на 2020, а сумма больше второго слагаемого на 1909. Восстановите пример.

238. Найдите трёхзначное число кратное 5 и такое, что если это число умножить на цифру его единиц, то результат будет больше суммы его цифр на 548.



239. В семь областей на рисунке надо вписать по числу так, чтобы число в каждой области было равно сумме чисел во всех соседних областях (две области считаются соседними, если они имеют общую границу).

240. Из пяти натуральных (не обязательно различных) чисел составили и вычислили всевозможные попарные суммы. Получилось всего три различных значения: 57, 70 и 83. Чему равно наибольшее из пяти чисел?

Тренировочные задания. Серия 5. Метод математической индукции.

Доказать, что при каждом натуральном n справедливо равенство:

241. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

242. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$

243. $2^2+6^2+10^2+\ldots+(4n-2)^2=\dfrac{4n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$

244. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$

245. $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2\cdot\left(2n^2-1\right)$

246. $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\ldots+n\cdot(3n+1)=n\cdot(n+1)^2$

247. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}$

248. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

Доказать утверждение для натуральных чисел:

249. Если $n\ge 5$, то $2^n>n^2$.

250. Если $n\ge 10$, то $2^n>n^3$.

251. $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ac$.

252. $a^2+2ab+3b^2+2a+6b+3>0$.

253. $a^8-a^5+a^2-a+1>0$.

254. $(a+b)^n<2^n(a^n+b^n)$.

Проверить равенство:

255. $2(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)=2^{n+1}(2n-1)!$

256. $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\dfrac{n\cdot(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$

257. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ldots+(n-1)\cdot n^2=\dfrac{n\cdot\left(n^2-1\right)\cdot(3n+2)}{12}$

258. $2+7+14+\ldots+\left(n^2+2n-1\right)=\dfrac{n\cdot\left(2n^2+9n+1\right)}{6}$

259. $2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+4\cdot 3^2+\ldots+(n+1)\cdot n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(3n+1)}{12}$

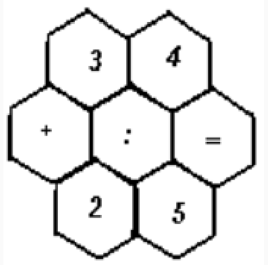
260. $(-1)^n\cdot(2n-1)+\ldots+11-9+7-5+3-1=(-1)^n\cdot n$

261. Найти сумму: $1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2$

Развивающие задания. Серия 6. Числовые ребусы[6].

262. Найдите числа $\overline{he}$ и $\overline{she}$ такие, что $\overline{he}^2=\overline{she}$.

263. Найдите четырёхзначное число $\overline{клоп}$ такое, что $9\cdot\overline{клоп}=\overline{полк}$.



264. В шестиугольниках записаны цифры и знаки арифметических действий так, как показано на рисунке. Требуется, начав с одного из шестиугольников и переходя в соседний, обойти все по одному разу. При этом надо записывать в строку то, что в них написано, и в итоге получить верное равенство. Какое?

265. В равенстве 101 – 102 = 1 передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.

266. Найдите трехзначное число $\overline{abb}$, произведение цифр которого есть двузначное число $\overline{ac}$, произведение цифр этого числа равно c.

267. Может ли быть верным равенство К · О · Т = У · Ч · Ё · Н · Ы · Й, если в него вместо букв подставить цифры от 1 до 9?

268. . В примере на сложение цифры заменили буквами и получили:

---

[6] Разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры.

$$КИС + КСИ = ИСК.$$

Восстановите пример.

269. В примере на сложение цифры заменили буквами и получили: БУЛОК + БЫЛО = МНОГО. Сколько же было булок? Их количество есть максимальное возможное значение числа МНОГО.

270. Замените буквы в слове ТРАНСПОРТИРОВКА цифрами так, чтобы выполнялось неравенство:

Т > Р > А > Н < С < П < О < Р < Т > И > Р > О < В < К < А.

271. $\begin{cases} МА \cdot МА = МИР \\ АМ \cdot АМ = РИМ \end{cases}$

272. ДУРАК + УДАР = ДРАКА.

273. В записи □1□2□4□8□16□32□64 = 27 в пустые окошечки поставьте знаки «+» или «–» так, чтобы равенство стало верным.

274. Можно ли заменить буквы цифрами в ребусе: *ШЕ· СТЬ* + 1=*СЕ· МЬ;* – так, чтобы получилось верное равенство?

275. *АААА – ВВВ* + *СС – К* = 1234

Развивающие задания. Серия 7. Арифметический метод решения сюжетных задач.

Арифметический метод решения сюжетных задач – адекватная задаче последовательность арифметических действий (при этом все арифметические операции при решении задачи проводятся над конкретными величинами, и основой рассуждения является знание смысла арифметических действий), описывающих ту или иную ситуацию/действие задачи – знаком вам с начальной школы.

Используя этот метод[7], решите следующие задачи.

276. Одного человека спросили: «Сколько вам лет?» Он ответил так: «Десять лет тому назад я был в четыре раза старше сына, а через десять лет я буду лишь вдвое старше его». Сколько лет этому человеку?

277. Два поезда выехали в разное время навстречу друг другу с двух станций, расстояние между которыми 588 км. Первый поезд проходил в час 48 км, а второй поезд проходил в час 63 км. На сколько часов один из них выехал раньше другого?

278. Воспитательница детского сада рассчитала, что если давать каждому ребенку по 6 слив, то останутся 38 слив. Если же раздавать по 8 слив, то одному ребенку слив не достанется. Сколько было детей и сколько слив?

279. У нескольких ребят было поровну яблок. Если бы ребят было на два меньше, то каждому досталось бы на одно яблоко больше. А если бы ребят было на три меньше, то каждому досталось бы на два яблока больше. Сколько было ребят?

---

[7] Для наглядности можно использовать геометрические информационные модели

280. Бобер Боб строит новую хатку. У него есть 6 бревен, которые надо разделить на 6 частей каждое. Своими острыми зубами он перегрызает бревно в одном месте за 1 минуту. Сколько времени займет у него вся эта работа?

281. Буратино увидел двух продавцов с тетрадками по одной и той же цене. «Умненький Буратино, – зовет его один продавец – если ты купишь у меня две тетрадки, то я их обе продам тебе на 40% дешевле!». «Богатенький Буратино, – кричит другой – если ты купишь такую же тетрадку у меня по обычной цене, то вторую я продам всего за 20 сольдо!». Умница Мальвина подсказала Буратино, что покупка двух тетрадок у первого продавца обойдется на 5 сольдо дешевле, чем у второго. Сколько стоила одна тетрадка сначала?

282. Царь Кащей подобрел и решил потратить 50 золотых монет на подарки детям. В сундуке у него хранится пять ларцов, в каждом ларце по три шкатулки, а в каждой шкатулке по десять золотых монет. Сундук, ларцы и шкатулки заперты на замки. Какое наименьшее число замков потребуется открыть Кащею, чтобы достать 50 монет?

283. В классе сидят мальчики и девочки. Если в класс войдут еще десять мальчиков, то всего мальчиков станет вдвое больше, чем девочек. Сколько девочек должны выйти из класса, чтобы среди оставшихся ребят оказалось вдвое больше мальчиков, чем девочек?

284. Капитан Флинт и несколько пиратов нашли сундук с золотыми монетами. Они разделили монеты поровну. Если бы пиратов было на 4 меньше, то каждый получил бы на 10 монет больше. Если бы монет было на 50 меньше, то каждый пират получил бы на пять монет меньше. Сколько золотых монет было в сундуке?

285. Как гласит русская поговорка, ложка дёгтя портит бочку мёда. Сколько банок мёда удастся испортить десятью каплями дёгтя, если в бочке сорок банок, а в ложке двести капель?

Развивающие задания. Серия 8.

286. Из города А в город В в 6 ч утра выехал грузовой автомобиль. Шесть часов спустя из города В в город А по той же дороге выехал ему навстречу легковой автомобиль. Автомобили движутся с постоянными скоростями. По предварительной договоренности они одновременно приехали в поселок С, расположенный на дороге между А и В. Разгрузка и оформление документов длились 5 часов. Затем грузовой и легковой автомобили продолжили каждый свой путь. Легковой и грузовой автомобили прибыли соответственно в города А и В одновременно в 23 ч того же дня. Найдите время прибытия автомобилей в населенный пункт С.

287. На кусте роз каждое утро, начиная с понедельника, расцветают пять бутонов. Каждое утро садовник срезает три из них. Из скольких роз будет состоять букет, если в ближайшее воскресенье садовник срежет все розы?

288. Турист, находящийся в спортивном лагере, должен успеть к поезду на железнодорожную станцию. Если он поедет на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то опоздает на 30 мин, а если на мопеде со скоростью 40 км/ч, то приедет за 2 ч до отхода поезда. Чему равно расстояние от лагеря до станции?

289. Турист добирался до места слета на велосипеде, на лодке, а затем пешком. Если бы путь на велосипеде занял у него в 3 раза меньше времени, на лодке – в 6 раз меньше, а пешком – в 4 раза меньше, то на всю дорогу у него ушло бы 2 ч. Если бы на велосипеде он также ехал в 3 раза меньше времени, на лодке – в 1,5 раза меньше. А пешком – в 2 раза меньше, то добрался бы до места слета за 3 ч. Сколько времени занял у него весь путь?

290. Из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 2 км, вниз по течению реки одновременно начинают движение соответственно плот и лодка. В тот же момент из пункта В навстречу плоту начинает движение катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к лодке и т.д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?

291. Лесхоз планировал заготовить за несколько дней 216 новогодних елей. Первые три дня лесхоз выполнял установленную ежедневную норму, а потом стал заготавливать на 2 ели в день больше. Поэтому уже за 1 день до срока было заготовлено 232 ели. Сколько елей ежедневно заготавливал лесхоз в первые три дня работы?

292. Химический комбинат получил заказ на изготовление этилового спирта, соляной кислоты и дистиллированной воды. Для готовой продукции потребовалась 21 железнодорожная цистерна. При перекачивании были использованы три специализированных насоса: сначала первый насос заполнил четыре цистерны этиловым спиртом, затем второй насос заполнил шестнадцать цистерн соляной кислотой и в завершение третий насос заполнил одну цистерну дистиллированной водой. Найдите минимально возможное время, затраченное на перекачивание всей продукции, если известно, что суммарная производительность всех трёх насосов равна 7 цистернам в сутки.

293. Студент затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 10 раз дешевле, авторучка – в 4 раза дешевле, а книга – в 5 раз дешевле, то та же покупка стоила бы 400 рублей. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил бы в 2 раза дешевле, авторучка – в 4 раза дешевле, а книга – в 3 раза дешевле, то студент заплатил бы 1200 рублей. Сколько стоит покупка, и за что было уплачено больше: за портфель или авторучку?

294. В 2020 году один профессор сказал: «Мне было $(n : 11)$ лет, когда шёл n^2 год». Сколько лет профессору?

295. Фермер арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60$ в день, производительность его в мягком грунте 250 м^3 в день, в твёрдом грунте – 150 м^3 в день. Аренда второго экскаватора стоит 50$ в день, производительность его в мягком грунте 180 м^3 в день, в твёрдом грунте – 100м^3 в день. Первый работал несколько полных дней и вырыл 720 м^3. Второй за несколько полных дней вырыл 330 м^3. Сколько дней работал каждый экскаватор, если фермер заплатил за аренду не более 300$.

296. *Познавательная задача.*

Вам необходимо освоить еще один метод решения сюжетных задач – компьютерное моделирование в электронных таблицах.

Преимуществом этого метода является возможность работы с тремя основными классами моделей: материальными (компьютерными), информационными (знаковыми и наглядно-образными) и мысленными (воображаемыми). Причем компьютерному моделированию в электронных таблицах предшествует информационное, в том числе и математическое, моделирование.

Рассмотрим метод моделирования в электронных таблицах подробнее[8].

Объекты и процессы, описанные в сюжетных задачах, можно выразить математическими формулами, связывающими их параметры. Эти формулы составляют математическую модель сюжетной задачи. По формулам можно сделать расчеты с различными значениями параметров и получить количественные характеристики модели. Расчеты, в свою очередь, позволяют сделать выводы и обобщить их. Среда электронных таблиц – это инструмент, который виртуозно и быстро выполняет трудоемкую работу по расчету и пересчету количественных характеристик исследуемого объекта или процесса.

Моделирование сюжетных задач в электронных таблицах проводится по общей схеме, которая выделяет четыре основных этапа: постановка задачи, разработка модели, компьютерный эксперимент и анализ результатов. Рассмотрим особенности проведения моделирования в среде электронных таблиц по каждому этапу.

I этап. Постановка задачи. Сюжетная задача с точки зрения компьютерного моделирования является наиболее простой: в ней четко поставлена цель и определены параметры (которые известны – данные условия, и которые надо найти – требования), поэтому постановка задачи осуществляется самим фактом существования данной задачи.

На этом этапе ученикам необходимо воспринять информацию задачи и, что главнее, «принять» задачу, то есть «захотеть ее решить».

Следует заметить, что при моделировании в электронных таблицах учитываются только параметры, которые имеют количественные характеристики, и взаимосвязи, которые можно описать формулами. Формализацию проводят в виде поиска ответов на вопросы, уточняющих общее описание задачи.

Как правило, сюжетная задача сформулирована в приведённом виде, и в ней четко поставлены цели и определены параметры модели, которые надо учесть. Тогда первый этап моделирования опускается как уже осуществленный. В противном случае проводится работа по формализации задачи (например, задачи в стихах).

---

[8] Информатика. 7-9 класс [Текст]: Практикум-задачник по моделированию. Базовый курс / Н.В.Макарова, Г.С.Николайчук /Под ред.Н.В. Макаровой. – СПб.: Питер, 2007.

II этап. Разработка модели. Этап разработки модели начинается с построения информационной модели в различных знаковых формах, которые на завершающей стадии воплощаются в компьютерную модель.

Информационная модель в табличной форме детально описывает объекты.

Иногда полезно дополнить представление об объекте и другими знаковыми формами: схемой, чертежом, формулами, – если это способствует лучшему пониманию задачи.

Во многих исследованиях используется прием *уточнения моделей.* Первоначально моделируется один элементарный объект с минимальным набором входных параметров. Постепенно модель уточняется введением некоторых из отброшенных ранее характеристик.

При исследовании количественных характеристик объекта необходимым шагом является составление *математической модели,* которое заключается в выводе математических формул, связывающих параметры модели.

На основе составленных информационной и математической моделей составляется *компьютерная модель.* Компьютерная модель непосредственно связана с прикладной программой, с помощью которой будет производиться моделирование. В нашем случае это электронные таблицы. При составлении расчетных таблиц надо четко выделить три основные области данных: исходные данные (ячейки таблицы для них желательно выделить цветом), промежуточные расчеты, результаты (выделены цветом шрифта). Исходные данные вводятся «вручную». Промежуточные расчеты и результаты проводятся по формулам, составленным на основе математической модели и записанным по правилам электронных таблиц. В формулах, как правило, используются абсолютные ссылки на исходные данные и относительные ссылки на промежуточные расчетные данные.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1		**За 1 ч**	**кол-во час**	**Объем**	Задача: Одна мельница может смолоть 38 ц пшеницы за 6 ч., другая – 96 ц за 15 ч., третья – 35 ц за 7 ч. Как распределить 133 т пшеницы между мельницами, чтобы они мололи зерно в течение одного и того же времени? Введите данные условия задачи в жёлтые ячейки
2	**I**	6 1/3	6	38	
3	**II**	6 2/5	15	96	
4	**III**	5	7	35	
5	**I**	6 1/3	75	***475***	
6	**II**	6 2/5	75	***480***	
7	**III**	5	75	***375***	
8	**I,II,III**	17 11/15	75	1330	
9					

III этап. Компьютерный эксперимент. После составления компьютерной модели проводятся тестирование и серия экспериментов согласно намеченному плану. *План эксперимента* должен четко отражать последовательность работы с моделью. Первым пунктом такого плана всегда является *тестирование* модели. Тестирование в электронных таблицах начинается с проверки правильности введения данных и формул.

Для проверки правильности алгоритма построения модели используется тестовый набор исходных данных, для которых известен или заранее определен другими способами конечный результат. Например, если используются при моделировании расчетные формулы, то надо подобрать несколько вариантов исходных данных и просчитать их «вручную». Это будет результат, полученный другим способом. Затем, когда модель построена, проводится тестирование на тех же вариантах.

В плане должен быть предусмотрен эксперимент или серия экспериментов, удовлетворяющих целям моделирования. Каждый эксперимент должен сопровождаться осмыслением результатов, которые станут основой анализа результатов моделирования.

	A	B	C		E		G
1		**v,v1<v2**	**t**		**S**		Введите данные условия задачи в жёлтые ячейки
2	**Николай**	60	4	12	240	***960***	
3	**Андрей**	80					
4		20	*Ответ.*		*960*		
	Задача: Николай и Андрей живут в одном доме. Николай вышел из дома и направился к школе. Через 4 минуты после него из дома вышел Андрей и догнал своего товарища у школы. Найдите расстояние от дома до школы, если Николай шёл со скоростью 60 м/мин, а скорость Андрея 80 м/мин.						

Расчётные формулы для данной компьютерной модели:

B4 := B3-B2

E2 := B2*C2

D2 := E2/B4

F2 := B3*D2

D4 := ЕСЛИ(B2<B3;F2;"Решений нет")

IV этап. Анализ результатов моделирования. Заключительным этапом моделирования является анализ модели. По полученным расчетным данным проверяется, насколько расчеты отвечают нашему представлению и целям моделирования. Важным качеством исследователя является умение увидеть в числах реальный объект или процесс.

Разработайте компьютерную модель одной из сюжетных задач данного раздела.

297. Конструирование вариаций задач

На основе данной задачи разработайте расширенную или сложную вариацию для подготовки школьников 7-8 классов к участию в математической олимпиаде.

297.1. Миша задумал пятизначное число. Вычеркнув из него одну цифру, он сложил полученное четырехзначное число с исходным пятизначным числом. Сумма оказалась равна 52713. Чему равна сумма цифр задуманного Мишей пятизначного числа?

297.2. Миша написал на доске 10 целых чисел. Затем он нашел произведение каждой пары чисел, написанных на доске. Ровно 15 из этих произведений оказались отрицательными. Сколько нулей среди 10 написанных на доске чисел?

297.3. Миша придумал новую операцию с числами: $a * b = 2a + 3b$. Чему равно $3*(4*5)$?

297.4. Первому мудрецу сообщили сумму трёх натуральных чисел, а Второму – их произведение. «Если бы я знал, – сказал Первый, – что твоё число больше, чем моё, я бы сразу назвал три искомых числа». «Мое число меньше, чем твоё, – ответил Второй, – а искомые числа ..., ... и ...». Какие числа назвал Второй мудрец?

297.5. Первый мудрец загадывает три натуральных числа: a, b, c. Второй мудрец должен назвать ему три числа: X, Y, Z, после чего Первый сообщает ему сумму $aX + bY + cZ$, затем Второй говорит еще один набор чисел x, y, z и Первый опять сообщает ему сумму $ax + by + cz$. Какие числа он должен назвать Второй мудрец, чтобы отгадать задуманные Первым числа.

298. *Познавательная задача.*

Изучите содержание таблицы и сформулируйте соответствующую гипотезу. Была ли она доказана или опровергнута математиками прошлого? Кто занимался этой проблемой, какие результаты были получены?

1 + 1 = 2				
1 + 3 = 4				
1 + 5 = 6	3 + 3 = 6			
1 + 7 = 8	3 + 5 = 8			
	3 + 7 = 10			
1 + 11 = 12		5 + 7 = 12		
1 + 13 = 14	3 + 11 = 14		7 + 7 = 14	
	3 + 13 = 16	5 + 11 = 16		
1 + 17 = 18		5 + 13 = 18	7 + 11 = 18	
1 + 19 = 20	3 + 17 = 20		7 + 13 = 20	
	3 + 19 = 22	5 + 17 = 22		…
1 + 23 = 24		5 + 19 = 24	7 + 17 = 24	…
	3 + 23 = 26		7 + 19 = 26	…
		5 + 23 = 28		…
1 + 29 = 30			7 + 23 = 30	…
1 + 31 = 32	3 + 29 = 32			…
	3 + 31 = 34	5 + 29 = 34		
		5 + 31 = 36	7 + 29 = 36	
1 + 37 = 38			7 + 31 = 38	
…	…	…	…	…
	$\boxed{} + \boxed{} = 1234567890$			
…	…	…	…	…

***299**. Развивающие задачи. Серия 9. Задачи на возраст и время.*

299.1. Тане было 16 лет 19 месяцев назад, а Мише будет 19 лет через 16 месяцев. Кто из них старше?

299.2. Один мальчик 19 сентября 2020 года сказал: «Разность между числами прожитых мною (полных) месяцев и прожитых (полных) лет сегодня впервые стала равна 111». Когда он родился?

299.3. В понедельник в полдень (12:00) часы показывали верное время, а уже через 4 часа они отставали на 1 час. В какой день и час эти часы впервые покажут время, на час большее, чем на самом деле?

299.4. В комнате на каждой стене висят часы, причём они все показывают неверное время: первые часы ошибаются на 2 минуты, вторые – на 3 минуты, третьи – на 4 минуты и четвёртые – на 5 минут. Как определить точное время в момент, когда часы показывают: 14:54, 14:57, 15:02 и 15:03?

299.5. Я иду от дома до школы 30 минут, а мой брат – 40 минут. Через сколько минут я догоню брата, если он вышел из дома на 5 минут раньше меня?

299.6. «Идет направо – песнь заводит, налево – сказку говорит». Чтобы рассказать сказку, ученому Коту требуется 5 минут, а чтобы спеть песню – 4 минуты. В 10 часов утра Кот начал рассказывать сказку. Куда будет идти Кот в полдень?

299.7. На вопрос о возрасте его детей математик ответил: «У нас с женой трое детей. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи был равен 45 годам, год назад, когда родился третий ребёнок – 70 годам, а сейчас суммарный возраст детей – 14 лет». Сколько лет каждому ребенку, если известно, что у всех членов семьи дни рождения в один и тот же день

299.8. Башенные часы отбивают три удара за 12 с. В течение какого времени они пробьют шесть ударов?

299.9. Каждый день баран учит одинаковое количество языков. К вечеру своего дня рождения он знал 1000 языков. В первый день того же месяца он знал к вечеру 820 языков, а в последний день этого месяца – 1100 языков. Когда у барана день рождения?

299.10. Два автобуса ехали навстречу друг другу с постоянными скоростями. Первый выехал из Москвы в 11 часов утра и прибыл в Ярославль в 16 часов, а второй выехал из Ярославля в 12 часов и прибыл в Москву в 17 часов. В котором часу они встретились?

***300**. Познавательная серия. Серия 10. Историко-педагогические задачи.*

Задачи по арифметике выпускных испытаний 1879 года.

300.1. 0,1666... часть суммы въ 23580 р. была уплачена трёмъ артелямъ рабочихъ, изъ которыхъ первая работала 2 дня, вторая – 3 и третья 5 дней. Числа рабочихъ въ этихъ артеляхъ относились другъ къ другу, начиная съ первой, какъ 1 : 6 : 8. Требуется узнать, по скольку получила каждая артель, если извѣстно, что они были наняты на одинаковыхъ условіяхъ.

300.2. Торговецъ, купивъ 75 кусковъ полотна по 49 аршинъ въ кускѣ, продалъ 25 кусковъ по 50 коп. аршинъ, 38 кусковъ по 45 коп. аршинъ и 12 кусковъ по 55 коп. аршинъ, и отъ этой продажи получилъ $37\frac{19}{21}$% прибыли. Почёмъ онъ купилъ аршинъ этого полотна?

300.3. Найти, чему равно выраженіе: $\dfrac{7/10 - 2/3}{9/12 + 1/3} : \dfrac{1/3}{9\,1/2}$.

300.4. Раздѣлить 1065 на такія три части, которыя относились бы между собою, какъ 3 : 5 : 7.

300.5. Торговецъ купилъ три ящика одного и того же сорта чаю. Въ одномъ ящикѣ было $1/3$, въ другомъ 0,2(7) всего купленнаго количества чаю, а въ третьемъ 140 фунтовъ. За весь купленный чай онъ заплатилъ 686 р. 88 коп., включая въ этой суммѣ расходы по доставкѣ товара, составлявшіе 67% его стоимости. Сколько заплачено за каждый ящикъ?

300.6. Куплено 2 куска земли, за которые черезъ два года со дня покупки заплачено 92610 руб. Спрашивается, сколько стоитъ каждый кусокъ, если цѣна перваго относится къ цѣнѣ втораго такъ, какъ $5/6$: $3/2$, и если въ уплаченной суммѣ заключается и стоимость земли, и двухлѣтніе сложные проценты со стоимости земли, считая по 5 на 100?

300.7. Куплено в Австріи 2600 центнеровъ желѣза по 8 гульденовъ за центнеръ и въ эту уплату выданъ вексель изъ 10% на полгода. На какую сумму выданъ этотъ вексель, если гульденъ на русскія деньги стоитъ 61,74 коп., а курсъ кредитнаго рубля въ это время былъ 2 франка 50 сантимовъ?

300.8. Купецъ смѣшалъ чай двухъ сортовъ, причемъ первого сорта взялъ 16 фунтовъ; фунтъ перваго сорта стоитъ ему самому по 3,5 рубля, а фунтъ втораго по 1,3 рубля; купецъ получитъ 20% прибыли, если будетъ продавать смѣсь по 3 рубля. Полученная смѣсь была пересыпана въ три ящика; число фунтовъ 1-го ящика относилось къ числу фунтов 2-го, как 0,1999 къ 0,3, а число фунтов 3-го составляло 20% того, что было въ 1-м и 2-м ящикахъ вмѣстѣ. Сколько фунтовъ было въ каждом ящикѣ?

300.9. Раздѣлить 257 на три такія части, которыхъ квадраты пропорціональны числамъ: 3, 5 и 7. Вычислить эти части съ точностью до 0,001.

300.10. 5 мужчинъ или 7 женщинъ могутъ окончить извѣстную работу въ 37 дней; во сколько дней окончатъ двойную работу 7 мужчинъ и 5 женщинъ?

Указание. Историко-педагогическая задача должна быть решена и с учётом требований исторической эпохи (с указанием использованных учебных пособий того времени), и с учётом требований современности!

IV. Числовые последовательности

Пусть X – это либо множество действительных чисел, тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов множества X называется *бесконечной числовой последовательностью*.

Зафиксируем в таблице «Последовательности» основные характеристики некоторых последовательностей. Введём обозначения для последовательностей:

$\{a_n\}$ арифметическая прогрессия и её частные случаи
$\{b_n\}$ последовательность натуральных чисел,
$\{c_n\}$ последовательность четных чисел,
$\{d_n\}$ последовательность нечетных чисел;

$\{h_n\}$ последовательность квадратов натуральных чисел;

$\{j_n\}$ последовательность кубов натуральных чисел;

геометрические прогрессии со знаменателем q:
$\{k_n\}$ для $q > 1$
$\{l_n\}$ для $|q| < 1$;
$\{m_n\}$ геометрическая прогрессия с чередованием знаков;

$\{r_n\}$ последовательность аликвотных дробей;

$\{s_n\}$ последовательность квадратов аликвотных дробей;

$\{t_n\}$ последовательность арифметических корней натуральных чисел;

$\{v_n\}$ последовательность арифметических корней натуральных чисел с чередованием знаков;

$\{u_n\}$ последовательность Фибоначчи: *1, 1, 2, 3, 5, 8,13, 21, …*;

$\{z_n\}$ последовательность Фарея порядка m, определяемая следующим образом: последовательность рациональных чисел вида $\frac{\alpha}{\beta}$ (где $\alpha, m, \beta \in \mathrm{N}$ $0 \le \alpha \le \beta \le m$, и $\frac{\alpha}{\beta}$ – несократимая дробь), расположенных в порядке возрастания.

Вопросительным знаком в таблице отмечены требования творческих (познавательных и исследовательских) задач.

Таблица 3. Последовательности

	Рекуррентная Формула	Формула n-го члена	Характеристическое свойство	Свойство членов равноудаленных от «концов» последовательности	Формула суммы первых n членов
$\{a_n\}$	$a_{n+1}= a_n+ \partial,\ \partial\neq 0$	$a_n=a_1+ (n-1)\partial,$	$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$	$a_1+a_n =a_2+a_{n-1}=\dots$	$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$
$\{b_n\}$	$b_1 = 1,$ $b_{n+1} = b_n+1$	$b_n= n$			$S_n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ $S_n=\frac{2a_1+\partial(n-1)}{2}\cdot n$
$\{c_n\}$	$c_1=2$ $c_{n+1} = c_n+ 2,$	$c_n=2n$			$S_n=n\cdot(n+1)$
$\{d_n\}$	$d_1=1$ $d_{n+1}= d_n+ 2,$	$d_n=2n+1$			
$\{h_n\}$	$h_{n+1}= h_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$	$h_n=n^2$	$4h_n=\left(\sqrt{h_{n-1}}+\sqrt{h_{n-1}}\right)^2$	$\sqrt{h_1}+\sqrt{h_n}=\sqrt{h_2}+\sqrt{h_{n+1}}$	$S_n=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$
$\{j_n\}$	$j_{n+1}= j_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$	$j_n=n^3$	$8j_n=\left(\sqrt[3]{j_{n-1}}+\sqrt[3]{j_{n+1}}\right)^3$	$\sqrt[3]{j_1}+\sqrt[3]{j_n}=$ $=\sqrt[3]{j_2}+\sqrt[3]{j_{n-1}}=\dots$	$S_n=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$
$\{k_n\}$	$k_{n+1} = k_n\cdot q,\ q>1$	$k_n=k_1\cdot q^{n-1},$ $k_1\neq 0$	$k_n^2 = k_{n-1}\cdot k_{n+1}\Leftrightarrow$ $k_n=\sqrt{k_{n-1}\cdot k_{n+1}}$	$k_1\cdot k_n= k_2\cdot k_{n-1}=\dots$	$S_n=\frac{k_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$
$\{l_n\}$	$l_{n+1}= l_n\cdot q,\ \lvert q\rvert<1,$	$l_n=l_1\cdot q^{n-1}$ $l_1\neq 0$	$l_n^2 = l_{n-1}\cdot l_{n+1}$	$l_1\cdot l_n= l_2\cdot l_{n-1}=\dots$	$S_n=\frac{l_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$
$\{m_n\}$	$m_{n+1} = m_n\cdot q,$ $q < -1$	$m_n=m_1\cdot q^{n-1},$ $m_1\neq 0$	$m_n^2 =m_{n-1}\cdot m_{n+1}$	$\lvert m_1\cdot m_n\rvert = \lvert m_2\cdot m_{n-1}\rvert$ $=\dots$	$S_n=\frac{m_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$
$\{r_n\}$	$r_{n+1}=\frac{n\cdot r_n}{n+1}$	$r_n=\frac{1}{n}$	$r_n=\frac{2r_{n-1}\cdot r_{n+1}}{r_{n-1}+r_{n+1}}$	$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_n}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_{n-1}}=\dots$	**?**
$\{s_n\}$	$s_{n+1}=\frac{s_n\cdot n^2}{n+1}$	$s_n=\frac{1}{n^2}$	**?**	$\sqrt{\frac{1}{s_1}}+\sqrt{\frac{1}{s_n}}=\sqrt{\frac{1}{s_2}}+\sqrt{\frac{1}{s_{n-1}}}$	**?**
$\{t_n\}$	$t_{n+1}=\sqrt{t_n^2+1}$	$t_n=\sqrt{n}$	**?**	**?**	**?**
$\{v_n\}$	$v_{n+1}=(-1)^{n+1}\sqrt{v_n^2+1}$	$v_n=(-1)^n\sqrt{n}$	**?**	**?**	**?**
$\{u_n\}$	$u_1 = u_2 = 1$ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$	**?**	$u_n= u_{n+1}- u_{n-1}$	**?**	$S_n = u_{n+2} - u_2$
$\{z_n\}$	**?**	**?**	**?**	(z^m): $z_1+ z_n=z_2+ z_{n-1}=$ $=\dots=1$	**?**

Тренировочные задания. Серия 1. Арифметическая прогрессия.

301. Чему равна сумма двенадцати первых членов арифметической прогрессии, первый и десятый члены которой соответственно равны 30 и 12.

302. Являются ли числа 83, 95, 100 и 102 членами арифметической прогрессии 3; 6; 9; 12; …

303. Даны числа 1 и 2; вставить между ними три члена так, чтобы вместе с данными они образовали арифметическую прогрессию.

304. Найти натуральное число x, если $1+7+13+\dots+x=280$, где слагаемые являются последовательными членами арифметической прогрессии.

305. Укажите наиболее близкий к нулю член арифметической прогрессии 22,7; 21,4; …

306. Существует ли арифметическая прогрессия, в которой $a_6 = 14$, $a_{10} = 20$, $a_{16} = 28$?

307. Про арифметическую прогрессию известно, что $a_5 + a_9 = 40$. Найдите $a_3 + a_7 + a_{11}$.

308. Найти сумму первых 25 совпадающих членов двух арифметических прогрессий: 3,8,13,… и 4,11,18,… .

309. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 27,5, а сумма следующих пяти её членов равна 90. Найти сумму членов этой последовательности с одиннадцатого по семнадцатый включительно.

310. Про арифметическую прогрессию известно, что $a_3 = 5$, $a_2 + a_6 = 18$. Найти число, обратное сумме первых десяти членов прогрессии.

311. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой отношение суммы первых 13 членов к сумме последних 13 членов равно 1/2, а отношение суммы всех членов без первых трёх к сумме членов без последних трёх равно 4/3.

312. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй её член в частном получится 5, а при делении тринадцатого члена этой прогрессии на её шестой член получится: в неполном частном – 2, в остатке – 5. Найти сумму двадцати членов этой прогрессии.

313. Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма первых n членов этой прогрессии является степенью двойки. Докажите, что n – также степень двойки.

Развивающие задания. Серия 2.

314. Найти сумму натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 150.

315. Найти сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 250, которые не делятся на 7.

316. Найти сумму всех чётных трёхзначных чисел, кратных 3, но не кратных 5.

317. Найти сумму натуральных чисел с тридцатого по сороковой включительно, если $a_n = 3n + 5$.

318. Найти сумму всех натуральных чисел, которые не превосходят 200, которые при делении на 5 дают в остатке 4.

319. Сколько существует натуральных четырёхзначных чисел, которые делятся только на одно из чисел 4 или 5?

320. Найти четырёхзначное число, если известно, что оно делится на 225, а его первые три цифры образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

Исследовательские задачи. Серия 3.

321. *Серия-цепочка «Суммирование степеней членов арифметической прогрессии».*

321.1. Возведём первые n членов арифметической прогрессии:

a_1, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, …, $a_{n\text{-}1} = a_{n-2} + d$, $a_n = a_{n-1} + d$; –

в m степень и постараемся найти их сумму: $S_m = a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_{n-1}^m + a_n^m$.

$$a_1^m = a_1^m$$

$$a_2^m = (a_1 + d)^m = a_1^m + ma_1^{m-1}d + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a_1^{m-2}d^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a_1^{m-3}d^3 + \ldots + ma_1 d^{m-1} + d^m$$

$$a_3^m = (a_2 + d)^m = a_2^m + ma_2^{m-1}d + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a_2^{m-2}d^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a_2^{m-3}d^3 + \ldots + ma_2 d^{m-1} + d^m$$

. . . .

$$a_{n-1}^m = (a_{n-2} + d)^m = a_{n-2}^m + ma_{n-2}^{m-1}d + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a_{n-2}^{m-2}d^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a_{n-2}^{m-3}d^3 + \ldots + ma_{n-2} d^{m-1} + d^m$$

$$a_n^m = (a_{n-1} + d)^m = a_{n-1}^m + ma_{n-1}^{m-1}d + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a_{n-1}^{m-2}d^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a_{n-1}^{m-3}d^3 + \ldots + ma_{n-1} d^{m-1} + d^m$$

сложим все равенства:

$$S_m = 2a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_{n-1}^m +$$

$$+ md\left(\underbrace{a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + a_3^{m-1} + \ldots + a_{n-1}^{m-1}}_{S_{m-1} - a_n^{m-1}}\right) +$$

$$+ \frac{m(m-1)d^2}{1\cdot 2}\left(\underbrace{a_1^{m-2} + a_2^{m-2} + a_3^{m-2} + \ldots + a_{n-1}^{m-2}}_{S_{m-2} - a_n^{m-2}}\right) +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)d^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\underbrace{a_1^{m-3} + a_2^{m-3} + a_3^{m-3} + \ldots + a_{n-1}^{m-3}}_{S_{m-3} - a_n^{m-3}}\right) + \ldots +$$

$$+ md^{m-1}\left(\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}}_{S_1 - a_n}\right) + \left(\underbrace{n}_{S_0} - 1\right)d^m.$$

$$a_n^m - a_1^m = md\left(S_{m-1} - a_n^{m-1}\right) +$$

$$+ \frac{m(m-1)d^2}{1\cdot 2}\left(S_{m-2} - a_n^{m-2}\right) +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)d^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(S_{m-3} - a_n^{m-3}\right) + \ldots$$

$$\ldots + md^{m-1}\left(S_1 - a_n\right) + \left(S_0 - 1\right)d^m.$$

321.2. Убедитесь, что $S_2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Для этого последовательно подставляйте в формулу *m = 1*, *m = 2*.

321.3. Выведите формулу для суммы кубов.

321.4. Докажите: $S_3 = (S_1)^2$.

321.5. Вычислите двумя способами: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$.

321.6. Составьте расширенную вариацию задачи ***321.5***.

321.7. Выведите формулы для суммирования степеней некоторых арифметических прогрессий.

322. *Серия-цепочка «Фигурные числа и их суммы».*

322.1. Рассмотрим натуральный ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … Будем складывать первые один, два, три, четыре и т.д. его члена, получая, таким образом, новую последовательность чисел: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, …, – последовательность *треугольных* чисел. Выясните, почему эти числа получили такое название. Выведите формулу общего члена этой последовательности. Выведите формулу суммы первых n членов последовательности треугольных чисел.

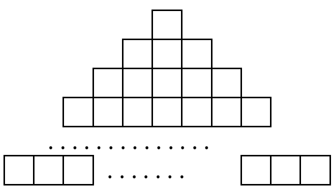
322.2. Складывая первые один, два, три, четыре и т.д. члена последовательности треугольных чисел, получим, таким образом, последовательность *треугольных пирамидальных* чисел: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, … Выясните, почему эти числа получили такое название. Выведите формулу общего члена этой последовательности. Выведите формулу суммы первых n членов последовательности треугольных пирамидальных чисел.

322.3. Рассмотрим последовательность нечётных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 11, … Будем складывать первые один, два, три, четыре и т.д. его члена, получая, таким образом, новую последовательность чисел: 1, 4, 9, 16, 25, 36, …, – последовательность *квадратных* чисел. Выясните, почему эти числа получили такое название. Выведите формулу общего члена этой последовательности. Выведите формулу суммы первых n членов последовательности треугольных чисел.

322.4. Постройте последовательность квадратных пирамидальных чисел; выведите формулу общего члена этой последовательности и формулу суммы первых n членов.

322.5. Найдите $a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \ldots + na^n$.

322.6. Вычислите $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+100\cdot 2^{99}$.



322.7. На клетчатой бумаге нарисована фигура: в верхнем ряду – одна клеточка, во втором сверху – три клеточки, в следующем ряду – 5 клеточек, и т.д., всего рядов n. Докажите, что общее число клеточек есть квадрат некоторого числа.

Тренировочные задания. Серия 4. Геометрическая прогрессия

323. В геометрической прогрессии $b_1=64$, $q=-1/2$. В каком случае при сравнении членов этой прогрессии знак неравенства поставлен неверно?

а) $b_2 < b_3$ б) $b_3 > b_4$ в) $b_4 > b_6$ г) $b_5 > b_7$

324. В геометрической прогрессии три члена. Их сумма равна 19, а сумма их квадратов равна 133. Найти члены прогрессии.

325. Существует ли геометрическая прогрессия, в которой $b_2 = -6$, $b_5 = 48$, $a_7 = 192$?

326. Сколько членов геометрической прогрессии нужно сложить, чтобы получить сумму 3069, если $b_1 + b_5 = 51$ и $b_2 + b_6 = 102$?

327. Между числами 2 и 18 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

328. Даны числа 1 и 2; вставить между ними три члена так, чтобы вместе с данными они образовали геометрическую прогрессию.

329. В геометрической прогрессии $b_{10} \cdot b_{14} \cdot b_{21} = -0{,}125$. Вычислить b_{15}.

330. Три числа b_1, b_2, b_3 образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Вычислить b_3 если $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 64$, $b_1+b_2+b_3 = 14$.

331. Найти x, если числа $30 - x^2$, x^2 и 1 являются последовательными членами геометрической прогрессии.

332. Найти пятый и седьмой члены геометрической прогрессии, если произведение её первого и пятого членов равна 1/4, а сумма второго и третьего равна 9/14.

333. Сумма первого и пятого членов геометрической прогрессии равна 51, а сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно сложить, чтобы их сумма была равно 3069?

Развивающие задания. Серия 5. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

334. Найти последовательность из четырёх чисел, первые три из которых образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую прогрессию; сумма крайних чисел последовательности равна *66*, а сумма средних её чисел – *60*.

335. Между числами 1 и 256 вставить три числа так, чтобы все пять чисел составили геометрическую прогрессию. Между теми же числами вставить четыре числа так, чтобы все шесть чисел составили арифметическую прогрессию. Найти сумму семи найденных чисел.

336. Найти трёхзначное число, если известно, что его цифры образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, меньшего данного на *400* – арифметическую прогрессию.

337. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна *91*. Если к этим членам прибавить соответственно *25, 27* и *1*, то получатся три числа, образующие арифметическую прогрессию.

338. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Чему равен знаменатель данной геометрической прогрессии, если известно, что по модулю он не превосходит 1.

339. Три различных числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a+b$, $b+c$, $c+a$ образуют арифметическую прогрессию. Чему равен знаменатель данной геометрической прогрессии?

340. Найти 4 числа, если известно, что первые три составляют геометрическую, а последние три – арифметическую прогрессию; сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних равна 12.

341. Девять натуральных чисел составили возрастающую арифметическую прогрессию. Первое, второе, четвёртое и восьмое образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2, а первое, третье и девятое – геометрическую прогрессию со знаменателем 3. Можно ли на основании этих данных восстановить данную прогрессию, если известно, что разность шестого и первого членов является полным квадратом?

342. Целые числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию. Если из числа c вычесть 64, то образуется арифметическая прогрессия $a, b, c - 64$. Чтобы вновь получить геометрическую прогрессию нужно их числа b вычесть 8 (то есть $a, b - 8, c - 64$ – геометрическая прогрессия). Найдите c.

343. Найти трёхзначное число, если известно, что его цифры образуют геометрическую прогрессию, а при вычитании из этого числа *792* получается новое число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если же из цифры, выражающей число сотен вычесть *4*, а остальные цифры оставить без изменения, то получится число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

344. Дана геометрическая прогрессия. Известно, что её первый, десятый и тридцатый члены являются натуральными числами. Верно ли, что её двадцатый член также является натуральным числом?

Развивающие задания. Серия 6. Разные последовательности

345. Являются ли числа 21, 235, 610 и 987 членами последовательности (a_n) такой, что $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

346. Последовательность $\{a_n\}$ определена как $a_1=137$ и $a_{n+1} - a_n = 0$ для $n \geq 1$. Найдите a_{8999}.

347. Найдите a_7 если $a_1=3, a_2=7$ и $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$.

348. Последовательность $\{a_n\}$ определена формулой $a_n=3^n-5^n+1/n$. Она возрастающая или убывающая?

349. Последовательность $\{a_n\}$ определена следующим: $a_1=1$, $a_2=1$ и $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$. Она возрастающая или убывающая?

350. Последовательность задана формулой $c_n = \frac{12}{n+1}$. Сколько членов в этой последовательности больше 2?

351. Первый член числовой последовательности равен 1, каждый из двух следующих равен 2, каждый из трех следующих за ними равен 3 и т.д. Чему равен 2017-й член этой последовательности?

352. Последовательность $\{d_n\}$ определена формулой $d_n=n^2+2n + 1$. Найдите сумму первых двадцати её членов.

353.Последовательность $\{d_n\}$ определена формулой $d_n=n^3+n^2+ 1$. Найдите сумму первых 33 её членов.

354. Последовательность $\{d_n\}$ определена следующим образом: $d_1 = 0$, $d_{n+1} = \begin{cases} d_n + 2 \text{ для чётных членов} \\ 2d_n \text{ для нечётных членов} \end{cases}$. Найти d_{2020}.

355. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 9. На втором месте – сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1, то есть 10: $9^2=81,\ 8+1+1+1=10$. На третьем месте – 2, полученная следующим образом: $10^2=100,\ 1+0+0+1=2$ и т.д. Какое число стоит на 2020 месте?

356. Найти наименьший член последовательности $\{c_n\}$, заданной формулой $a_k=k^2-2016\cdot k+20162016$.

357. $50^2-49^2+48^2-47^2+\ldots+2^2-1^2=?$

358. $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2=?$

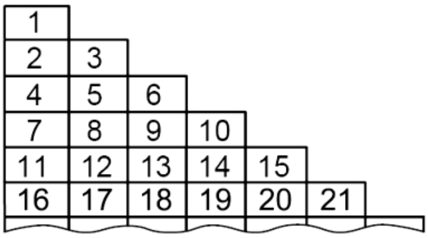
359. $1+11+111+1111+\ldots+\underbrace{11..11}_{n\ цифр}=?$

360. $\dfrac{n-1}{n}+\dfrac{n-2}{n}+\dfrac{n-3}{n}+\ldots+\dfrac{1}{n}=?$

361. $\dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^{11}}{3+12+\ldots+32}=?$

362. *1 – (2 – (3 – (4 – (5 – ... - (999 – (1000 – 1001))...)))?*

<u>Развивающие задания. Серия 7. Поиск закономерности.</u>



363. Числа от 1 до 120 выписаны в 15 строк, как показано на рисунке. В каком из столбцов (считая слева) сумма чисел самая большая?

364. Какое число нужно подставить для продолжения последовательности: 0, 0, 1, 2, 2, 4, 3, 6, 4, 8, 5, … ?

363. Найдите закономерность и подставьте числа вместо многоточия: 1, 2, 3, 12, 21, 23, …, 312, 123, 1221, …, …, …

366. Найдите закономерность и подставьте числа вместо многоточия:

1, 2, 3, 3, 6, 18, 54, 324, …, …, …

367. Найдите закономерность и подставьте числа вместо многоточия:

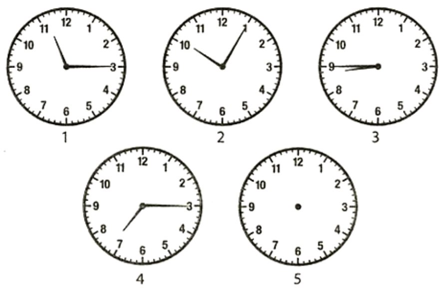
1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, …, …, …

368. Найдите закономерность и подставьте числа вместо многоточия:

1, 2, 2, 4, 8, 11, …, 37, 148, 153, 765, 771, …, 4633, …

369. Девочка заменила каждую букву в своём имени её номером в русском алфавите. Получилось число 2011533. Как её зовут? Предложите Вариацию этой задачи для своего имени.

370. В школе есть 1000 шкафов для одежды с номерами 1, 2, . . . , 1000, которые на ночь запираются. В этой школе живёт 1000 привидений. Ровно в полночь 1-е привидение открывает все шкафы; затем 2-е закрывает шкафы с номерами, делящимися на 2; затем 3-е меняет состояние (открывает, если шкаф закрыт и наоборот) тех шкафов, номер которых делится на 3 и т.д. 1000-е меняет состояние шкафа с номером 1000, после чего привидения исчезают. Сколько шкафов останутся открытыми?



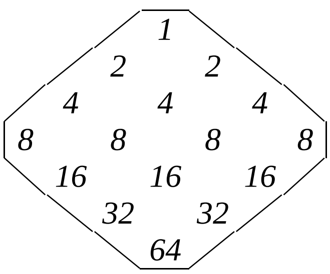
371. Какое время должны показывать часы под номером 5, чтобы продолжить определенную последовательность.

Развивающие задачи. Серия 8.

372. Про первые шесть чисел последовательности известно, что каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Сумма первых шести чисел равна 7996. Чему равно пятое из вписанных чисел?

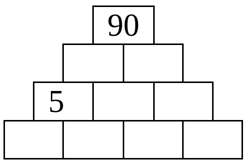
373. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника являться последовательными членами геометрической прогрессии?

374. $\{a_1, a_2, ..., a_{20}\}$ – набор целых положительных чисел. Строим новый набор чисел $\{b_0, b_1, b_2, ...\}$ по следующему правилу: b_0 – количество чисел исходного набора, которые больше 0; b_1 – количество чисел исходного набора, которые больше 1; b_2 – количество чисел исходного набора, которые больше 2; и т.д., пока не пойдут нули. Докажите, что сумма всех чисел исходного набора равна сумме всех чисел нового набора.



375. Таблица имеет форму ромба со стороной длины n. В первой строчке таблицы стоит одно число 1. Во второй – два числа – две двойки, в третьей – три четверки, и так далее (здесь нарисован квадрат 4 × 4, но решить задачу нужно не только для этого частного случая, а желательно для любого натурального n). В каждой следующей строчке стоит следующая степень двойки. Длина строчек сначала растет, а затем убывает так, чтобы получился ромб. Докажите, что сумма всех чисел таблицы есть квадрат некоторого целого числа.

376. В последовательности сумма любых трёх подряд идущих членов равна 2020, пятый член равен 675, а трёхсотый – 700. Чему равен 2020 член?



377. Заполните пустые ячейки пирамиды натуральными числами так, чтобы каждое число было равно произведению двух чисел, написанных под ним. Чему равна сумма всех чисел в пирамиде? Укажите все возможности.

Развивающие задачи. Серия 9. Олимпиадные задачи для младших подростков.

378. Вова и Вася выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Вася. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Вова всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 9.

379. Вова раздавал семи друзьям 707 блоков конструктора Лего. Каждый следующий друг получал на один блок больше предыдущего. Какое наибольшее число блоков конструктора Лего мог получить один из друзей Вовы?

380. Васе на 23 февраля подарили *777* конфет. Вася хочет съесть все конфеты за k дней, причем так, чтобы каждый из этих дней (кроме первого, но включая последний) съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа k это возможно?

381. Вова записала шесть различных натуральных чисел, сумма которых равна 22. Вася записал сто различных натуральных чисел, сумма которых равна 5051. Вова угадал, какие числа записал Вася, а Вася угадал, какие числа записал Вова. Как им это удалось?

382. Вова и Вася решали задачи у доски, а все остальные откровенно бездельничали. Вася, решив свою задачу, записал четыре числа, составляющие арифметическую прогрессию. Вова, решив свою задачу, записал четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию. Учитель, стерев условия и решения обеих задач, сложил одноимённые члены обеих прогрессий и получил числа: 27, 27, 39, 87, по которым за 5 минут предложил всему классу восстановить ответы решавших у доски. Попробуйте сделать это и вы.

383. С утра пораньше Вова стал искать сумму всех чисел от 15 до 43. Получил в результате 804. Это неверный результат, так как Вова пропустил одно число. Какое число он пропустил?

384. 12 мальчиков и 8 девочек являются членами математического клуба. Каждую неделю в клуб принимают двух новых девочек и одного мальчика. Сколько будет членов в клубе в тот день, когда мальчиков и девочек станет поровну?

385. В студию танцев приняли 60 мальчиков и 20 девочек. Каждую неделю уходят 2 мальчика и приходят 3 новые девочки. Сколько танцоров будет в студии, когда число мальчиков и девочек сравняется?

Развивающие задачи. Серия 10.

386. Три брата, числа лет которых образуют геометрическую прогрессию, делят между собой некоторую сумму денег пропорционально возрасту. Если бы ту же сумму денег они разделили пропорционально возрасту через три года, то младший брат получил бы на 1050 рублей больше, а средний на 150 рублей больше, чем теперь. Сколько лет каждому из братьев, если известно, что разница в возрасте между старшим и младшим равна 15 годам?

387. Вова, Миша, и Вася покупали блокноты и карандаши. Вова купил 4 карандаша и 2 блокнота, Миша купил 6 карандашей и блокнот, Вася – 3 карандаша и блокнот. Сколько стоит блокнот, если известно, что карандаш стоит 3 рубля, а суммы денег, потраченные Вовой, Мишей и Васей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию?

388. Вова, Вася, Миша и Даша ловили рыбу. Оказалось, что количество рыб, пойманных Вовой, Васей и Мишей, образует в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Вова поймал на 2 рыбы меньше, а Даща на 12 меньше, чем на самом деле, то количества рыб, пойманных Вовой, Мишей и Дашей образовали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на 18 рыб меньше Даши?

389. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а в каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?

390. Средний рост трех студентов равняется 1 м 78 см, причем рост каждого из них не менее 1 м 72 см. Какой максимально возможный рост любого из этих студентов?

391. В *21* кучу разложили *200* орехов. Докажите, что существуют две кучи, в которых орехов поровну.

392. Васе поручили за несколько дней посадить в одну линию ровно 321 цветок. Каждый следующий день он должен сажать по одному цветку во все промежутки между уже посаженными цветами. На какое наибольшее число дней ему удастся растянуть эту работу?

393. Миша и Вова считают деревья, растущие вокруг большого поля. Мальчики двигаются в одном направлении, но начинают счет с разных деревьев. То дерево, которое Вова назвал двадцатым, для Миши оказалось шестым, а дерево, которое Вова назвал седьмым, для Миши оказалось девяносто четвертым. Сколько деревьев растет вокруг поля?

394. Из города А выезжает автомобиль и едет по прямой дороге со скоростью 50 км/ч. Затем каждый час из А выезжает новый автомобиль, причем каждый следующий едет на 1 км/ч быстрее предыдущего. Последний автомобиль выезжает через 50 часов после первого и едет со скоростью 100 км/ч. Какова скорость автомобиля, который будет возглавлять колонну через 100 часов после старта первого автомобиля?

395. Однажды в понедельник Вова принес в школу и дал почитать Даше сборник фантастических рассказов. Во вторник Даша отдала его Мише, а Миша в четверг отдал его Васе, а Вася в следующий понедельник отдал его Руслану, и так далее причем каждый держал у себя книгу вдвое дольше предыдущего. В результате книга вернулась к Вове опять в понедельник, но лишь в следующей учебной четверти. Сколько ребят успели её прочесть?

Исследовательские и познавательные задачи. Серия 11.

396. Исследуйте последовательности Фарея – заполните ячейки последней строки таблицы 3, отмеченные знаком «?».

Последовательность Фарея порядка m, определяется как последовательность рациональных чисел вида $^{\alpha}/_{\beta}$ (где $^{\alpha}/_{\beta}$ несократимая дробь, причем $0\leq\alpha\leq\beta\leq m, m\in\mathrm{N}$), расположенных в порядке возрастания.

Составьте последовательность Фарея 8-го порядка; какие при этом трудности вы испытали? Составьте последовательность Фарея 1-го порядка и 2-го порядка; какую закономерность при этом вы заметили? Продолжайте составление последовательностей 3, 4, …, 7-го порядков; как вы при этом будете действовать?

Сравните последовательности Фарея порядка m < 8.

Постройте графики функций, описывающие последовательности Фарея порядка m < 8 в системе координат ZON.

Докажите (опровергните) следующие гипотезы относительно свойств последовательности Фарея:

1. Если $z_n=\alpha_n/\beta_n$ и $z_{n+1}=\alpha_{n+1}/\beta_{n+1}$, то выполняется равенство

$$\beta_n\cdot\alpha_{n+1}-\alpha_n\cdot\beta_{n+1}=1.$$

2. Между членами $z_n=\alpha_n/\beta_n$ и $z_{n+1}=\alpha_{n+1}/\beta_{n+1}$ z_{n+1} последовательности Фарея порядка $m-1$ расположено число z^m последовательности порядка m:

$$z^m=(\alpha_n+\alpha_{n+1})/(\beta_n.+\beta_{n+1}).$$

3. Члены последовательности Фарея порядка m симметричны относительно числа ½, при этом выполняется равенство $z_1+z_n=z_2+z_{n-2}=\ldots=1$.

4. Первые m чисел $(m>0)$ последовательности Фарея $m+1$ порядка образуют последовательность аликвотных дробей, записанную в порядке возрастания.

5. График (в системе координат ZON) приближается к прямым $n=0$, $n=1$.

6. Графики симметрично расположенные относительно прямой $z_n=½$ сужаются к прямым $z_n=⅓$ и $z_n=⅔$ соответственно.

7. Последовательность Фарея описывает множество рациональных чисел.

8. Последовательность Фарея эквивалентна множеству натуральных чисел.

397. Проведите исследование последовательности Фибоначчи по следующему плану (I-VII).

I. К последовательности чисел Фибоначчи приводит решение следующей задачи: «Сколько пар кроликов может произойти от одной пары в течение года, если а) каждая пара каждый месяц порождает новую пару, которая со второго месяца становится производителем, и б) кролики не умирают?».

Данная последовательность имеет вид: *1, 1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34, 55, 89, …*

Докажите по индукции следующее свойство последовательности Фибоначчи: $$u_{n+m}=u_{n-1}\cdot u_m+u_n\cdot u_{m+1} \qquad (*)$$

II. Последовательность Фибоначчи обладает следующими свойствами:

1. $u_{2n}=u_{n+1}^2-u_{n-1}^2$;
2. $u_{3n}=u_{n+1}^3+u_n^3-u_{n-1}^3$;
3. $u_n^2=u_{n-1}\cdot u_{n+1}+(-1)^{n+1}$;
4. Если n делиться на m, то и u_n делиться на u_m.
5. Каково бы ни было целое число m, среди первых m^2-1 чисел Фибоначчи найдется хотя бы одно, делящееся на m.
6. Соседние числа Фибоначчи взаимно просты.

Докажите эти свойства. В случае затруднения воспользуйтесь следующими указаниями:

1. Воспользуйтесь формулой (*), равенством $m=n$ и формулой $n+1$ члена последовательности Фибоначчи для доказательства первого свойства.

2. Второе свойство доказывается аналогично первому *(полагая $m=2n$).*

3. Третье свойство доказывается по индукции. При доказательстве индуктивного перехода используют приём прибавления обеим частям исходного равенства одного и того же числа. В нашем случае это число $u_n\cdot u_{n+1}$.

4. Пусть n делиться на m, тогда справедливо следующее равенство $n=m\cdot k$. Проведите доказательство индукцией по k.

5. Следует ли из формулировки теоремы указания на то, <u>какое именно</u> число Фибоначчи делиться на m? Можно ли сказать, что в сформулированном утверждении говориться о том, что первое число Фибоначчи делящиеся на m не должно быть особенно большим? Используя рассуждения по индукции, проверьте выполнимость утверждения для $m=2\div6$. Выпишите остатки от деления. Выявите закономерность. Результат обобщите.

6. Доказать утверждение методом от противного.

III. Используя рекуррентную формулу, продолжите последовательность Фибоначчи «влево»: запишите первые 7 чисел.

IV. Определите (U_n) – последовательность Фибоначчи в случае $n \in Z$. Перечислите некоторые свойства последовательности (U_n).

V. Запишите формулу нахождения n*-го* $(n<0)$ члена последовательности Фибоначчи (U_n) с использованием последовательности (u_n).

VI. Выведите формулу для вычисления суммы n $(n<0)$ чисел Фибоначчи.

VII. Проверить равенства (под символом $S_{-3;3}$ следует понимать сумму чисел последовательности Фибоначчи *от* U_{-3} *до* U_3 включительно):

А) $S_{-6} = -4.$ Б) $S_{-5} = 4.$ В) $S_{-3;3} = 6.$

Г) $S_{-3} = S_3$ Д) $S_{-3} + S_3 = 3 + 3$ Е) $S_{-3} + S_3 = S_{-3}$

398. Исследуйте последовательность, заданную формулой n-го члена: $K_n = \dfrac{1}{2^n}$. В чём её особенность? Как она связана с числами Канвея? Что вам известно об этих числах?

399. Осуществите подборку историко-математических и/или историко-педагогических задач по теме «Числовые последовательности». Опишите методы решения задач.

400. Чем уникальна последовательность простых чисел? Как бы вы описали эту последовательность на языке теории множеств? На алгебраическом языке? Перечислите некоторые свойства последовательности простых чисел.

V. Делимость. Свойства делимости

Натуральное число n *делится* на другое натуральное число m, обозначают $n \vdots m$, если найдётся такое натуральное число x, что $n = m \cdot x$.

В зависимости от количества делителей число n, все натуральные числа можно разделить на три класса.

Натуральные числа

1	**Простые числа**	**Составные числа**
единственный делитель – 1	$p=1 \cdot p$ два делителя	$s=1 \cdot a \cdot b$ более двух делителей

Основная теорема арифметики (V.1):

$$s = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – простые числа,

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – целые неотрицательные числа

(V.1) – каноническая запись натурального числа

Решето Эратосфена

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Основная теорема арифметики: всякое натуральное число можно единственным образом представить в виде произведения степеней простых множителей.

Теоремы о свойствах делимости

Условие	Заключение	
Если $a,b,c,d, k,m,n \in$ N и …	то…	
$a \vdots b$	$ak \vdots b$	V.2
$a \vdots k,\ b \vdots k$	$(a \pm b) \vdots k$	V.3
$a \vdots c,\ b \vdots d$	$ab \vdots cd$	V.4
$a \vdots b$	$a^k \vdots b^k$	V.5
$a \vdots b,\ b \vdots c$	$a \vdots c$	V.6
$a \vdots k,\ b \vdots k$	$ab \vdots k^2$	V.7
$a \vdots bc$	$a \vdots b$ или $a \vdots c$	V.8
$ab \vdots m$, *НОД*$(a,m)=1$	$b \vdots m$	V.9
$a \vdots m,\ a \vdots n$, *НОД*$(m,n)=1$	$a \vdots mn$	V.10
$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k) \vdots k$		V.11
$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k) \vdots k!$		V.12

Общим делителем нескольких чисел называется число, служащее делителем для каждого из них. Наибольший из общих делителей обозначается *НОД*$(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ и определяется двумя основными способами. Первый – с использованием разложения на простые множители натуральных чисел, чей НОД необходимо найти; второй – алгоритм Евклида.

Если *НОД*$(a,b)=1$, то числа a и b называют *взаимно простыми*.

С понятием взаимно простых чисел связаны некоторые свойства делимости натуральных чисел (свойства V.9 и V.10).

Нахождение НОД двух чисел методом разложения на множители

Правило нахождения	Пример
1. Даны числа a и b	*1804* и *328*
2. Записать числа a и b в каноническом виде	$1804=2^2\cdot 11\cdot 41$ и $328=2^3\cdot 41$
3. Выписать ***все общие простые*** множители, входящие в каноническую запись каждого из чисел a и b	*2* и *41*
4. Возвести каждый из выписанных простых множителей в наименьшую степень, с которой этот множитель входит в каноническую запись чисел a и b	2^2 и *41*
5. Произведение полученных степеней даст *НОД(a,b)*	$НОД(a,b)= 2^2\cdot 41=164$

Нахождение НОД двух чисел по алгоритму Евклида

<table>
<tr><th colspan="2">Правило нахождения</th><th>Пример</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Даны числа a и b, $a>b$</td><td>1804 и 328</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Представить большее из чисел в виде $a=q\cdot b+r$, где q – неполное частное, а r – остаток от деления a на b</td><td>$1804=5\cdot 328+164$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Представить в виде
$b=q_1\cdot r+r_1;\ r=q_2\cdot r_1+r_2;\ \ldots;\ r_{n-1}=q_{n+1}\cdot r_n+r_{n+1}$</td><td rowspan="2">$328=2\cdot 164+0$</td></tr>
<tr><td>$r_n=q_{n+2}\cdot r_{n+1}+0$</td><td>$r_n=q_{n+2}\cdot r_{n+1}+1$</td></tr>
<tr><td>$НОД(a,b)= r_{n+1}$</td><td>$НОД(a,b)=1$</td><td>$НОД(a,b)= 164$</td></tr>
</table>

Наименьшее натуральное число, которое делится нацело на a и b называется *наименьшим общим кратным* и обозначается *НОК(a,b)*.

Нахождение НОК двух чисел методом разложения на множители

Правило нахождения	Пример
1. Даны числа a и b	*1804* и *328*
2. Записать числа a и b в каноническом виде	$1804=2^2\cdot 11\cdot 41$ и $328=2^3\cdot 41$
3. Выписать ***все общие простые*** множители, входящие в каноническую запись хотя бы одного из чисел a или b	*2, 11* и *41*
4. Возвести каждый из выписанных простых множителей в наибольшую степень, с которой этот множитель входит в каноническую запись чисел a или b	2^3, *11* и *41*
5. Произведение полученных степеней даст *НОК(a,b)*	$НОК(a,b)= 2^3\cdot 11\cdot 41=3608$

Сформулируем некоторые полезные теоремы.

$НОД(a,b,c)= НОД(НОД(a,b),c)$ V.13

$НОК(a,b,c)= НОК(НОК(a,b),c)$ V.14

$НОД(a,b)\cdot НОК(a,b)=a\cdot b$ V.15

$НОД(ac,bc)= c\cdot НОД(a,b)$ V.16

$НОК(ac,bc)= c\cdot НОК(a,b)$ V.17

$НОД(a,a+1,a+2)=1$ V.18

$НОД(2a,2a+2)=2$ V.19

Развивающие задания. Серия 1.

401. Какой цифрой оканчивается сумма всех двузначных чисел?

402 Какой цифрой оканчивается сумма всех трёхзначных чисел?

403. Число 15 в 5 раз больше своего наименьшего делителя, отличного от 1. Сколько всего натуральных чисел обладают таким же свойством?

404. Сколько простых чисел *p* обладают следующим свойством: *p* представимо в виде суммы простых чисел и *p* представимо в виде разности простых чисел?

405. Сколько целых чисел *k* обращают дробь $\dfrac{15k^2+14k-1}{5k-2}$ в целое число?

406. Какое из следующих чисел чётно, если известно, что *a* – чётно, а *b* – нечетно?

а) ab б) $2(a+b)$ в) $a+b$ г) $a+b+1$

407. Какое из следующих чисел нечётно, если известно, что *a* – чётно, а *b* – нечетно?

а) ab б) $2(a+b)$ в) $a+b$ г) $a+b+1$

408. Какое из следующих чисел кратно 3, если известно, что *a* – чётно, а *b* – кратно 3?

а) ab б) $b(a+1)$ в) $a+b$ г) $a+b+3$

409. Какое из следующих чисел кратно 3, если известно, что *a* – кратно 6?

а) ab б) $b(b+1)(b+2)(a+1)$ в) $3a+b$ г) $a+3b$

410. Чему равно частное от деления НОК чисел *6300* и *990* на их НОД?

Тренировочные задания. Серия 2. Сократите дробь.

411. $\dfrac{93790101}{95543187}$ ***412***. $\dfrac{2205901}{2767003}$

413. $\dfrac{5025763}{15094237}$ ***414***. $\dfrac{7650252}{84152037}$

Развивающие задания. Серия3.

Решите систему на множестве натуральных чисел

415. $\begin{cases} m\cdot n=12 \\ НОД(m,n)=1 \end{cases}$ ***416***. $\begin{cases} m+n=20 \\ НОД(m,n)=1 \end{cases}$

417. $\begin{cases} m\cdot n=120 \\ НОД(m,n)=2 \end{cases}$ ***418***. $\begin{cases} m+n=20 \\ НОД(m,n)=5 \end{cases}$

Развивающие задания. Серия 4.

Докажите, что при каждом натуральном *n* число

419. n^3+11n делится на 6;

420. $6^{2n-1}+1$ кратно 7;

421. $4^n+15n-1$ кратно 9;

422. n^5-n делится на 30.

423. $\overline{abcabc}$ делится на 7, на 11, на 13

Развивающие задания. Серия 5.

Найдите числа, удовлетворяющие условию делимости.

424 $\overline{56x6x}\vdots 36$ ***425***. $\overline{135x3}\vdots 45$ ***426***. $\overline{55x5xy}\vdots 63$ ***427***. $\overline{xy12yx}\vdots 72$

428. $\overline{x2y2z5}\vdots 55$ ***429***. $\overline{xyxyxy}\vdots 21$ ***430***. $\overline{7xx0x}\vdots 77$ ***431***. $\overline{x12345x}\vdots 18$

Развивающие задания. Серия 6.

Докажите, что следующие числа являются составными:

432. $\overline{123456789}$;

433. $11\cdot 21\cdot 31\cdot\ldots\cdot 91-111$;

433. $123456^{123456}-11$;

435. $2^{33}+1$;

434. $10^{2009}+8$;

437. $4^{105}+5^{105}$;

435. $\overline{xyz}$, *ггд* $x,y,z\in\{1,4\}$;

439. $13^{25}+17^{89}+2^{71}$;

440. $3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 83-2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 70$;

441. $(6789^{5}+6)^{18}-1$;

442. $7^{40}-19$;

443. $2^{3^{2009}}-1$.

Развивающие задания. Серия 7.

Докажите следующие утверждения:

444. Сумма кубов любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

445. Если натуральное число взаимно-просто с числом 6, то $(n^2-1)\vdots 24$

456. $\sqrt{\underbrace{11111\ldots1}_{2\,n\text{ цифр}}-\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ цифр}}}=\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ цифр}}$

447. Все числа вида $2^{2^n}+1$ $(n\geq 2, n\in\mathrm{N})$ оканчиваются цифрой 7.

448. Все числа вида $2^{4^n}-5$ $(n\in\mathrm{N})$ оканчиваются цифрой 1

449. Если число c не делится на *НОД(a,b)*,то уравнение $ax+by=c$ $(a,\ b\ ,\ c\neq 0)$ не имеет решения в целых числах.

450. Сумма всех семизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, в записи которых каждая цифра участвует только один раз, делится на 9.

451. При каждом натуральном n число $\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}$ является натуральным.

Развивающие задания. Серия 8.

452. Найдите простые делители числа 1 000 027.

453. Найдите такое число, что, если из него вычесть 7, результат умножить на 7, то получится тот же результат, как если бы мы вычли из этого же числа 11 и результат умножили на 11.

454. Найдите девятизначное число**,** все цифры которого различаются между собой и не содержат нуля, и квадратный корень из которого имеет вид $\overline{ababc}$, где $\overline{ab}=c^3$.

455. Найдите все варианты представления числа 316 в виде суммы двух слагаемых, одно из которых делится на 13, а другое – на 11.

456. Найдите цифры**,** которые следует вписать вместо * в числе $\overline{30*0*03}$, чтобы получить число, делящееся на 13.

457. Найдите число $\overline{aabb}$, такое, что $\overline{aabb} = n^2$, $n \in$N.

458. Сколько чисел вида $\overline{5*383*8*2*936*5*8*203*9*3*76}$ делящихся на 396, в записи которых цифры, обозначенные *, не повторяются?

459. Найдите натуральные n и m, разность квадратов которых равна 21.

460. Найдите двузначное число, произведение цифр которого, сложенное с 12, даёт это же число.

Развивающие задания. Серия 9.

Докажите следующие утверждения.

461. Ни при каком натуральном n число $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ не может заканчиваться ни одной из цифр 2, 4, 7, 9.

462. Произведение трёх последовательных натуральных чисел, среднее из которых совпадет с кубом натурального числа, делится на 504.

463. Для любых натуральных x, число $x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3$ делится на 8640.

464. Число $\frac{(3n)!}{6^n \cdot n!}$ – натуральное для любого натурального n.

465. Если составное натуральное число n больше четырёх, то

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \,\vdots\, n.$$

466. Если n – чётно, то число $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ – целое.

467. Если p – простое число большее 3, то $(n^2 - 1) \,\vdots\, 24.$

468. Не существует простого числа p, для которого числа $p+5$ и $p+10$ простые.

469. Среди любых 30 последовательных натуральных чисел найдётся такое, у которого сумма цифр делится на 11.

470. Если a,b,c – нечётные числа, то $НОД(a,b,c) = НОД\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+c}{2}; \frac{b+c}{2}\right)$.

471. Для двух натуральных чисел, одно из которых есть разность квадратов нечётных чисел, а другое – сумма квадратов этих чисел, число 4 не является общим делителем.

472. Любое составное число s имеет простой делитель, не превосходящий корня из s.

Развивающие задания. Серия 10.

473. Найдите натуральные n, при которых $(n^4 + 4)$ – простое число.

474. Может ли произведение четырёх последовательных натуральных чисел быть равным 11880?

475. $\sqrt{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \ldots}} = ?.$

476. Найдите пару чисел**,** не удовлетворяющую условию $187x - 104y = 41$ из следующего перечня: $(3;5)$, $(107;192)$, $(211;379)$, $(314;565)$, $(419;753)$, не подставляя непосредственно указанные значения в формулу.

477. Сформулируйте теорему, справедливую для любого натурального числа, за исключением чисел 5; 23; 304.

478. Найдите сумму цифр наименьшего натурального числа n, обладающего свойством: если у n ровно 3 различных простых делителя, то у $11n$ таких делителей тоже 3, а у числа $6n$ – четыре;

479. Найдите все простые числа n и m, для которых $m^2 - 2n^2 = 1$.

480. Найдите все целые числа n и m, удовлетворяющие условию $m \cdot n = n + 2m$.

481. Найдите целые числа a и b такие, что их сумма равна 1244. Если к числу a приписать справа цифру 3, а в числе b отбросить последнюю цифру 2, то полученные числа будут равны;

482. $(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot(2^4+1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)\cdot(2^{32}+1) = ?$

483. Сколько из натуральных чисел 1, 2, …, N делится на 12, если не менее 13 из них делятся на 4, и не более 9 чисел делятся на 6.

484. Докажите, что сумма всех шестизначных чисел, у которых сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр, делится на 13.

485. Найдите целые x, при которых $(x^2-71) \vdots (7x+55)$.

<u>Развивающие задания. Серия 11.</u>

Решите задачи.

486. В типографии набирали строку с умножением вида $\overline{abc}\cdot\overline{bca}\cdot\overline{cab}$, но набор рассыпался, и цифры произведения перемешались. В результате произведение было напечатано в виде *234 235 286*. Известно, что $a>b>c$, и что в разряде единиц напечатана верная цифра 6. восстановите истинное значение произведения.

487. Вы пришли в магазин и хотите купить 8 одинаковых авторучек, несколько карандашей по 4 рубля, линейку за 9 рублей, две общие тетради по 18 рублей и 12 тонких тетрадей. Продавец подсчитал общую стоимость товаров и попросил вас уплатить в кассу 527 рублей. Как, по-вашему, не ошибся ли продавец?

488. На станцию привезли 420 тонн угля в вагонах вместимостью по 15 тонн, 20 тонн и 26 тонн. Сколько и каких вагонов было использовано, если всего было 27 вагонов?

489. У отца спросили, сколько лет его двум сыновьям. Ответ был таков: если к произведению чисел, означавших их года, прибавить сумму этих чисел, то будет 14. Сколько лет сыновьям?

490. Сколько лет капитану, сколько у него детей, и какова длина его судна, если произведение этих трёх искомых (целых) чисел равно 32118, и известно, что (1) длина судна выражается в метрах и более 1 метра; (2) у капитана есть несколько сыновей (более 1); (3) капитану больше лет, чем он имеет детей, но ста лет ему еще нет?

491. «Сколько у вас детей, и какого возраста?» – спросил однажды гость у учителя математики? «У меня три мальчика», – ответил учитель. – «Произведение чисел их лет равно 72, а сумма этих чисел равна номеру нашего дома». Гость вышел на улицу, посмотрел на номер, вернулся и сказал: «Задача не определена!» «Да, вы правы, – сказал учитель, – но я всё-таки надеюсь, что старший из моих сыновей пойдёт по моим стопам». Сколько лет каждому из детей учителя?

492. Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка – в 2 раза дешевле, а книга – в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8оо рублей. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка – в 4 раза дешевле, а книга – в 3 раза дешевле, то школьник уплатил бы за покупку 1200 рублей. Сколько стоит покупка, и за что было уплачено больше: за портфель или авторучку?

493. Сумма, равная 53 копейкам, составлена из монет по 3 и 5 копеек, общее количество которых менее 15. если в этом наборе монеты по 3 копейки заменить на монеты в 5 копеек, а монеты по 5 копеек – на монеты по 3 копейки, то полученная в результате сумма уменьшится по сравнению с первоначальной, но не более, чем в полтора раза. Сколько монет достоинством в 3 копейки было в наборе?

494. В комнате несколько четырёхногих стульев и трёхногих табуретов. Когда на всех стульях и табуретах сидит по человеку, в комнате всего 39 ног. Сколько в комнате стульев и сколько табуретов?

495. Найти прямоугольный треугольник, стороны которого выражались бы натуральными числами, причём все девять цифр, участвующих в записи сторон – различны.

Исследовательские и познавательные задачи. Серия 11.

496. *Обобщение теоремы делимости чисел Фибоначчи*: u_n делиться на u_m тогда и только тогда, когда n делиться на m.

I. Докажите данное утверждение.

II. Сформулируйте признаки делимости чисел Фибоначчи на 2, на 4, на 5, на 7, на 13.

III. Докажите признаки делимости чисел Фибоначчи:

Число Фибоначчи четно тогда и только тогда, когда его номер делиться на 3.

Число Фибоначчи делится на 4 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 6.

Число Фибоначчи делится на 5 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 5.

Число Фибоначчи делится на 7 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 8.

Число Фибоначчи делится на 13 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 7.

III. Докажите следующие факты:

Нет нечетных чисел Фибоначчи делящихся на 17.

Нет нечетных чисел Фибоначчи делящихся на 9.

Нет четных чисел Фибоначчи делящихся на 11.

497. *Задачи Диофанта.* Что вы знаете о великом учёном древности Диофанте Александрийском? О диофантовых уравнениях первой и второй степени? Какое отношение имеют эти уравнения к теории делимости?

Решите следующие задачи Диофанта (на множестве N, в крайнем случае – на Q) в общем виде и для конкретных чисел.

I. Заданное число разложить на два числа, имеющие данную разность. (Пусть заданное число будет 100, а разность 40. Определить эти числа.)

Решение Диофанта. Положим, что меньшее число x, тогда большее будет $x+40$: взятые вместе они дадут $2x+40$. Заданное число – 100. Следовательно, 100 равно $2x+40$. из подобных вычитаем подобные: из 100 вычитаем 40, в остатке будет $2x$, равное 60. тогда каждое x равно 30. наименьшее число будет 30, а большее 70. Доказательство очевидно.

II. Предложенное число разложить на два таких числа, чтобы заданные их неодинаковые части при сложении образовали заданное число. (Разложить число 100 на два числа так, чтобы $^1/_3$ первого числа и $^1/_5$ второго числа, сложенные вместе давали 30).

III. Найти три таких числа, чтобы они, сложенные попарно, равнялись трём данным числам. Необходимо, чтобы полусумма трёх данных чисел была больше каждого из них.

IV. Найти два таких числа, чтобы их сумма и произведение равнялись заданным числам. Нужно, чтобы квадрат полусуммы искомых отличался от их произведения на квадрат.

V. Заданный квадрат разложить на два квадрата.

VI. Данное число, являющееся суммой двух квадратов, разбить на два других квадрата.

VII. К двум заданным числам прибавить одно и то же число, такое, чтобы каждое сделалось квадратом.

Решение Диофанта. Пусть данные числа будут 2 и 3; прибавляем к каждому x. Тогда $x+2$ и $x+3$ будут квадратами; мы имеем здесь так называемое двойное равенство; приравниваются же они следующим образом. Зная разность, ищи два таких числа, чтобы их произведение давало эту разность, например 4 и ¼. Тогда или половина разности этих чисел, умноженная на себя, будет равна меньшему, или половина суммы, умноженная на себя, будет равна большему. Но половина разности, умноженная на себя, будет $^{225}/_{64}$; это равняется $x+2$, и x получается $^{97}/_{64}$. Половина же суммы, умноженная на себя, будет $^{289}/_{64}$; это равняется большему, то есть $x+3$; и x получается опять $^{97}/_{64}$. таким образом, число, которое нужно прибавлять, будет $^{97}/_{64}$. Оно, очевидно, удовлетворяет условию задачи.

498. Разработайте расширенную вариацию задачи: «Из чисел, квадраты которых делятся на 24, выбрали самое маленькое. Чему равна сумма цифр этого числа?» – для подготовки учащихся 5-6 классов к олимпиаде по математике.

499. Подберите или разработайте самостоятельно серию не менее чем из 10 задач, аналогичных задаче: «Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?» – для подготовки учащихся 5-6 классов к олимпиаде по математике.

500. Какое отношение к алгоритму Евклида имеет задача: «Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной *n*, разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит последний кусок – треугольник со стороной 1, – победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?»?

ОГЛАВЛЕНИЕ